CALCULO

Primer curso, nivel superior

Hugo ARIZMENDI PEIMBERT
Angel M. CARRILLO HOYO
Miguel LARA APARICIO
Instituto de Matemáticas y Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México



ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA
Argentina • Brasil • Chile • Colombia • Ecuador
España • Estados Unidos • México • Perú
Puerto Rico • Venezuela

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

ISBN 0-201-64020-1 Addison-Wesley Iberoamericana
ISBN 968-6630-29-5 Sistemas Técnicos de Edición

CDEFGHIJKL-M-99876543210

Se terminó de imprimir el día 27 de abril de 1990 en los talleres de Litográfica Ingramex, S.A.
Centeno 162-1, 09810 México, D.F. La tirada fue de 1000 ejemplares.

PREFACIO

Este libro comprende material suficiente para un primer curso de cálculo diferencial e integral de dos semestres de duración.

Del título se desprende que el libro va dirigido a estudiantes de nivel superior, pues damos por supuesto que el material básico para estudiantes de ciencias exactas se ha cubierto por completo.

Este texto es también adecuado para estudiantes de ciencias de la ingeniería si, a juicio del profesor de la asignatura, se suprimen algunas demostraciones de teoremas de los cuales sólo interese su aplicación.

La experiencia demuestra que para afianzar los conocimientos teóricos adquiridos es necesaria la resolución de ejercicios. Por ese motivo, el lector encontrará en esta obra una cantidad apreciable de ellos, además de sugerencias sobre la solución de muchos.

El material de cada capítulo va precedido por una pequeña biografía de un precursor del cálculo y por la descripción de algunos acontecimientos culturales de su época que hayan podido influir en él. Lo primero se hizo para apreciar la profundidad del pensamiento del personaje, y lo segundo, para situarlo en la época correspondiente.

A fin de no confundir las ideas y conceptos del cálculo, y no alargar demasiado el texto, no incluimos algunos resultados de geometría analítica ni de álgebra. Aunque, en caso necesario, el lector siempre podrá consultar algunas de las obras incluidas en la bibliografía.

Por último, queremos agradecer a varios profesores sus sugerencias y comentarios acerca del manuscrito; en especial, al doctor Alberto Barajas Celis por sus atinadas indicaciones sobre las biografías. Agradecemos también a Addison-Wesley Iberoamericana, en particular a nuestros amigos Juan José Fernández Gaos y Laura Milena Valencia Escobar, por su paciencia y apoyo editorial para la presentación de este libro.

Ciudad Universitaria, UNAM

Hugo ARIZMENDI PEIMBERT
Angel M. CARRILLO HOYO
Miguel LARA APARICIO

INDICE GENERAL

Arquímedes
(287 a 212 a.C.)

La grandeza del pensamiento científico de Arquímedes ha dominado el panorama de la ciencia durante varios siglos y trasciende hasta nuestros días.

Hijo del astrónomo Fidias, nació en Siracusa y vivió las postrimerías del imperio helénico. Se educó en Alejandría, en ese tiempo centro universal del conocimiento.

Su obra se conoce por los escritos que a la fecha han podido rescatarse y las referencias a ella hechas por contemporáneos suyos. Mantuvo correspondencia con algunos maestros de Alejandría, como Conon de Samos, Dositeo de Pelusa y Eratóstenes de Cirene.

No se conoce el método seguido por Arquímedes para llegar a sus sorprendentes resultados matemáticos; sólo se sabe, gracias a un escrito llamado Sobre teoremas mecánicos: el método, *que dedicó a Eratóstenes, que para atacar sus problemas se valía de cualquier cosa útil. Este método significó un claro avance respecto a la limitación que el pensamiento filosófico de Platón imponía a los matemáticos de la época, al permitir sólo la utilización de la regla y del compás en la solución de problemas geométricos.*

Como si lo anterior fuera poco, se adelantó 2000 años a Newton y Leibniz e inventó el cálculo integral; más aún, en uno de sus problemas se vislumbra el descubrimiento del cálculo diferencial. Calculó áreas de figuras planas y volúmenes acotados por superficies curvas; encontró que la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo es igual a una constante que llamó π, *cuyo valor estimó entre* $3\frac{1}{7}$ *y* $3\frac{10}{71}$. *Proporcionó métodos para calcular raíces cuadradas; inventó un sistema de numeración mediante el cual podían representarse números tan grandes como se deseara (recuérdense las deficiencias del método griego para representar números). En mecánica, descubrió las leyes de las palancas; calculó las áreas y los centros de gravedad de superficies planas y de sólidos de diversas formas; creó la ciencia de la hidrostática y la utilizó para encontrar las posiciones de reposo y de equilibrio de distintos cuerpos flotantes.*

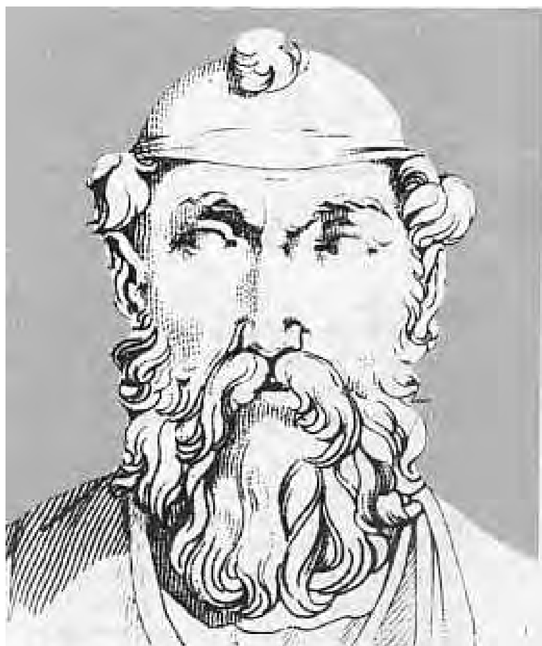
La figura de Arquímedes se vio acompañada de leyendas y anécdotas. He aquí algunas:

Al pedirle el rey Hierón que confirmara su sospecha de que un joyero había adulterado la corona de oro puro a él encomendada, Arquímedes encontró un principio importante de la hidrostática. Durante algún tiempo el sabio buscó, sin éxito, la solución al problema, hasta que un día, al tomar un baño de tina, observó que el agua

se desbordaba; entonces se le ocurrió que la cantidad de agua salida de la bañera correspondía al volumen de la parte de su cuerpo dentro de la tina. En consecuencia, si sumergía la corona en el agua podría saber, por su cambio de nivel, el volumen de la corona, pudiendo así compararla con el volumen desplazado por un mismo peso de oro. Si los dos volúmenes eran iguales, la corona estaría elaborada con oro puro; si la corona contenía una mezcla de plata o algún otro metal, el volumen desplazado sería diferente. A continuación, recorrió, desnudo por supuesto, las calles de Siracusa, gritando: «¡Eureka, eureka!» (¡Lo encontré!)

Durante la segunda guerra púnica diseñó, para su amigo Hierón, artefactos bélicos que obligaron a los romanos a prolongar tres años el sitio de Siracusa. Entre éstos se encontraba uno capaz de levantar una embarcación por la proa y, mediante una rápida sacudida, azotarla contra el mar; catapultas que lanzaban piedras de gran tamaño a los barcos enemigos que se encontraban aún lejos, y piedras pequeñas en gran número a aquellos que se acercaban lo suficiente; artefactos que, sobre la base de espejos convexos, concentraban el calor del Sol sobre las velas de los barcos romanos, incendiando y destruyendo la flota.

Cuando los romanos tomaron Siracusa, un soldado se presentó para conducir a Arquímedes al conquistador Marcelo. El sabio, que a la sazón tenía 75 años de edad, se enojó porque aquél se paró sobre el diagrama geométrico que resolvía en la arena, y le increpó: «¡No moleste a mis círculos!» Por toda respuesta, el soldado desenvainó su espada y le dio muerte. Este hecho brutal quedó resumido en el comentario de Whitehead: «Ningún romano ha perdido la vida por estar absorto en la contemplación de un diagrama matemático.»



Arquímedes

1



NUMEROS REALES

INTRODUCCION

En el estudio del cálculo tiene importancia primordial el conocimiento de los números reales.

Desde la época de oro de la filosofía griega, Zenón de Elea (siglo V a.C.), defensor de la escuela de Parménides de Elea que sustentaba básicamente el principio de lo «inmutable», enunció varios problemas, conocidos como «paradojas de Zenón», con los cuales demostraba la «verdad» de lo que defendía.

He aquí tres de las paradojas de Zenón:

1. La *dicotomía*. Supóngase que una persona va a desplazarse de la posición A a la posición B (Fig. 1.1).

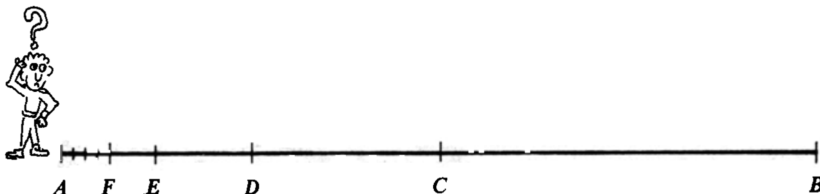


Figura 1.1

Zenón dice que esta persona no puede moverse de la posición A, pues para llegar a B requiere primero llegar a la mitad de la distancia entre A y B; designemos por C esta nueva posición. Pero, para llegar a C, antes requerirá llegar a su vez a la mitad de la distancia entre A y C, y así sucesivamente, hasta una infinidad de posiciones. Por tanto, la persona de la posición A se verá impedida para moverse.

2. *Aquiles y la tortuga*. Se realiza una carrera en la que compiten el héroe griego Aquiles y una no menos famosa tortuga, mas, como la lentitud de ésta es proverbial, Aquiles acepta darle ventaja (Fig. 1.2).

   Sin embargo, con gran sorpresa del público asistente, Aquiles no puede alcanzar a la tortuga, pues primero debe llegar al punto del cual ésta partió; al hacerlo, la tortuga se ha adelantado ya. Así, Aquiles deberá pasar por las posiciones que la tortuga ha tocado y, así, ella siempre se encuentra delante de él.

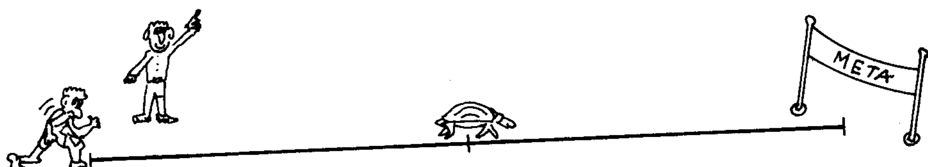


Figura 1.2

3. La *flecha*. Piénsese en una flecha que se ha disparado y se encuentra en el aire. Sea t_0 un instante, si éste es indivisible entonces la flecha no puede moverse, pues si lo hiciera, significaría que el instante es divisible. Por tanto, la flecha se encuentra en reposo en el instante t_0. Sin embargo, el tiempo está constituido por instantes. Entonces, ¿cómo es posible que el movimiento sea consecuencia de una sucesión infinita de estados en reposo?

Estas paradojas desconcertaron a los seguidores de la escuela de Heráclito de Efeso, que proclamaba que todo en la naturaleza es mutable: «No te bañas dos veces en las mismas aguas de un río.» Como anécdota, se dice que estas paradojas fueron contadas a Diógenes Laercio, quien habitaba en un barril. Al final del planteamiento, Diógenes salió de su tonel, caminó en círculo, regresó a su lugar de partida, y dijo: «¿Ven como sí existe el movimiento?»

Todos estos problemas tienen un denominador común que preocupa no sólo a los filósofos, sino también a los matemáticos: el problema del *movimiento*. De hecho, puede proponerse como finalidad del *cálculo* establecer un modelo del movimiento para lo cual el conocimiento de los números y de las funciones reales resulta de importancia fundamental.

El propósito de este capítulo es hacer un modelo numérico de la recta, asociando un número a cada punto de ella, lo que permitirá interpretar ciertas propiedades de la recta. Con este fin se introducen los números reales, sin definirlos formalmente, sino sólo resaltando sus propiedades básicas, para así obtener una comprensión más profunda de la recta.

Para abordar el presente capítulo, el lector requerirá tan sólo estar familiarizado con los conceptos de geometría elemental y números enteros.

NUMEROS RACIONALES

Para hacer un modelo numérico de la recta, se utilizarán, en primer término, los números racionales; es decir, todos aquellos números que pueden expresarse como cociente de dos números enteros, uno de los cuales, el denominador, es distinto de cero. Por ejemplo, $\frac{3}{4}, \frac{9}{7}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{7}$, etc. Es claro que todo número entero es racional.

Dos expresiones p/q y r/s representan un mismo número racional si, y sólo si,

$ps = qr$. Por tanto, si m es un entero distinto de cero, p/q y mp/mq representan el mismo número racional.

Cuando el numerador p y el denominador q no tienen factores comunes, se denomina a p/q la *mínima expresión* de ese racional.

En esta colección de números se definen dos operaciones, a saber, la suma

$$p/q + r/s = (ps + qr)/qs,$$

y la multiplicación

$$p/q \cdot r/s = pr/qs$$

Las operaciones de división y sustracción cubiertas en cursos elementales son en realidad casos particulares de las anteriores.

Orientación de una recta

La recta puede recorrerse en dos sentidos diferentes. Convendremos en llamar a uno de ellos *sentido positivo*, y al otro, *sentido negativo*. Una vez establecido el sentido positivo, se dice que la recta está *orientada*.

Segmentos dirigidos. Si se considera una recta orientada y un segmento de la misma, se dirá que éste tiene *orientación positiva* si es recorrido en el sentido positivo de la recta; cuando un segmento tiene una orientación negativa se define en forma análoga. Una vez que en un segmento se establece un sentido, decimos que éste está *dirigido.*

Al segmento que une los puntos P y Q se le denota por $\overline{PQ}$. Para indicar la forma de recorrerlo se usa la notación $\overrightarrow{PQ}$, indicadora de que el segmento se recorre de P a Q; es decir, esta última notación sirve para denotar los segmentos dirigidos.

Así, un segmento $\overline{PQ}$ determina dos segmentos dirigidos, a saber, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$. Llamamos *origen* de un segmento dirigido al punto inicial del mismo, y *extremo*, al punto final. En el texto la longitud del segmento $\overline{PQ}$ se denota simplemente por PQ.

Identificación de los números racionales con los puntos de una recta

Recuérdese cómo se obtiene la q-ésima parte de un segmento AB.

Trácese un rayo que parta de A y que no contenga a B (Fig. 1.3).

En ese rayo se escoge un segmento AU y se consideran q copias consecutivas de dicho segmento sobre el rayo (Fig. 1.4).

Unase el punto B con el extremo final C del último de los q segmentos, como se aprecia en la figura 1.4. Por U, trácese una recta paralela a BC; la intersección con AB determina un punto U'. Afirmación: el segmento AU' es la q-ésima parte del segmento AB.

En efecto, los triángulos AUU' y ABC son semejantes y, por consiguiente, $AU'/AB = AU/AC$, pero $AU = AC/q$, de donde $AU' = AB/q$.

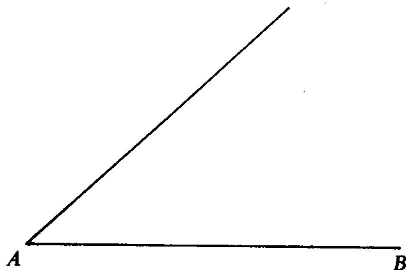


Figura 1.3

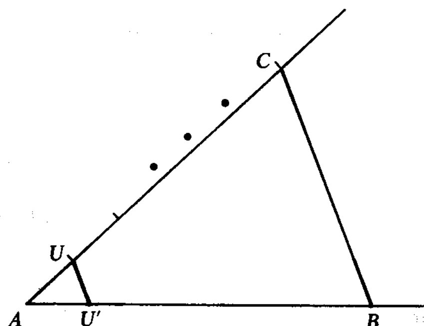


Figura 1.4

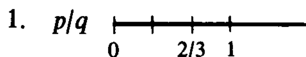
Considérese una recta orientada L y un número racional p/q y supóngase que p y q son enteros positivos. Tómense dos puntos distintos entre sí, O y P_1, en la recta L, de manera que $\overrightarrow{OP_1}$ tenga sentido positivo; asóciese a uno de ellos, O, el racional 0 y a P_1 el 1; de acuerdo con lo descrito, obténgase la q-ésima parte del segmento $\overrightarrow{OP_1}$. A partir de O y en la dirección de P_1, tómense p copias consecutivas de la q-ésima parte de $\overrightarrow{OP_1}$. El extremo del último de dichos segmentos es el punto P correspondiente a p/q. Si p es mayor que q, entonces P_1 se encuentra entre O y P; de otra forma, P puede coincidir con P_1, o bien estar entre O y P_1.

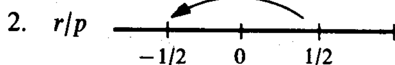
Si alguno de los números p o q es negativo, existen enteros p' y q' positivos, tales que

$$p/q = -p'/q'$$

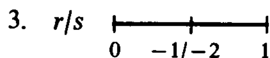
El punto asociado a p/q es el simétrico respecto a P_0 del punto asociado a p'/q', el mismo que puede obtenerse como ya se indicó.

EJEMPLOS Sean $p = 2$, $q = 3$, $r = -1$, $s = -2$. Localícense los puntos que corresponden a los números racionales siguientes:

1. p/q 

2. r/p 

Se localiza $\frac{1}{2}$ y se refleja respecto a 0.

3. r/s 

Obsérvese que $\frac{-1}{-2}$ es otra representación de $\frac{1}{2}$; por tanto, basta localizar $\frac{1}{2}$.

NUMEROS IRRACIONALES

Lo ya visto podría hacer pensar que los números racionales son suficientes para lograr el propósito de asignar un número a cada punto de una recta, lo cual es falso. En cierta manera, los griegos pensaron por un tiempo que aquello era cierto. Sin embargo, en los diálogos de Platón ya se menciona que Aristóteles refería la existencia de magnitudes geométricas no conmesurables con la unidad; en nuestro lenguaje, esto significa la existencia de números no expresables, como la razón de dos números enteros, y que, sin embargo, resultan necesarios para medir longitudes.

Por ejemplo, considérese el triángulo rectángulo cuyos catetos tienen una longitud igual a 1 (Fig. 1.5). Por el teorema de Pitágoras se sabe que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, en este caso, igual a 2.

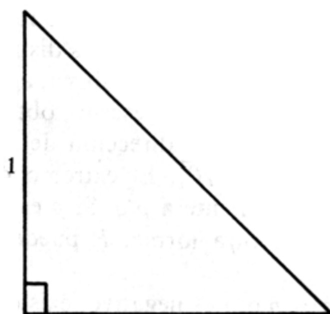


Figura 1.5

A continuación se probará que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2; es decir, la longitud de la hipotenusa no es representable como la razón de dos números enteros.

Supóngase que existe un número racional escrito en su mínima expresión y tal que

$$p^2/q^2 = 2;$$

por tanto,

$$p^2 = 2q^2, \qquad [1.1]$$

lo cual implica que q^2 es un entero par y, por consiguiente, p es un número par (véase Ejercicio 1.3).

Así, entonces, $p = 2s$, y al sustituir en [1.1], se tiene que

$$4s^2 = 2q^2;$$

es decir,

$$2s^2 = q^2,$$

lo cual implica que q también es par y es una contradicción al hecho de que p/q está escrito en su mínima expresión.

Al colocar la hipotenusa de este triángulo sobre la recta, a partir de 0 y en la dirección positiva (Fig. 1.6), se concluye, por lo anterior, que al otro extremo no le corresponde ningún número racional.

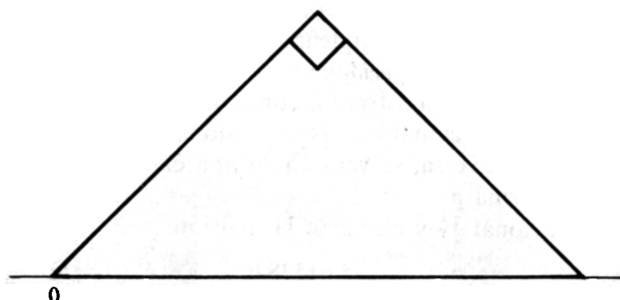


Figura 1.6

Lo sorprendente del caso es que hay una infinidad de puntos sobre la recta que no corresponden a números racionales. A continuación se verá la manera de asignar a tales puntos, números denominados *irracionales*. En particular, el número que se asignará a la hipotenusa del triángulo anterior será el irracional conocido como $\sqrt{2}$. Además, números tan familiares como π, e, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc., son también irracionales.

Expresiones decimales

Existe otra manera de expresar los números racionales: la forma decimal; por ejemplo, $\frac{1}{4}$ se representa también como 0.25, siendo esta última expresión la conocida como expresión decimal del número racional $\frac{1}{4}$.

En forma más amplia, puede decirse que una expresión decimal es de la forma

$$\pm n_0 \cdot n_1 n_2 \cdots n_k \cdots$$

donde $n_0 = 0$, o n_0 es un entero positivo y las cifras decimales n_k son enteros comprendidos entre 0 y 9.

Los puntos suspensivos después de n_k indican que la expresión se prolonga indefinidamente.

Si a partir de cierto índice $k \geqslant 1$ todos los enteros n_k son iguales a cero, se tiene la convención de expresar el decimal hasta n_{k-1}; por ejemplo, no se escribe 0.50000..., sino sólo 0.5.

Por otro lado, si a partir de cierto índice k aparecen sólo enteros iguales a 9 y $n_{k-1} \neq 9$, entonces la expresión decimal $\pm n_0 \cdot n_1 n_2 \cdots n_k \cdots$ se identifica con la expresión $\pm n_0 \cdot n_1 n_2 \cdots [n_{k-1} + 1]$; por ejemplo,

$$2.756\bar{9} \text{ se identifica con } 2.757 \qquad [1.2]$$

En [1.2], la raya encima del número 9 indica que éste se repite indefinidamen-

te; en este texto se usará esta notación. Por otra parte, se hará la convención de no considerar expresiones decimales con terminaciones o «colas» de nueves. Más aún, no se consideran números decimales aquellos en los que se repita indefinidamente el 9. Volviendo a la notación de emplear una raya encima de la cifra que se repite periódicamente, se tiene, como ejemplo, que si se escribe $0.21\overline{831}$, entonces se representa a la expresión decimal 0.21831831..., donde los puntos suspensivos indican que 831 se repite sucesiva e indefinidamente. Cuando se obtenga una de tales expresiones se dirá que es *periódica.*

Mediante dos ejemplos se mostrará a continuación la manera de obtener la expresión decimal de un racional p/q (la expresión decimal resultante será periódica siempre), y, a la inversa, se verá cómo una expresión decimal periódica se puede llevar a la forma p/q.

Considérese el racional $\frac{73}{13}$ y efectúese la división

```
      5.6153846...
13 | 73.
      80
       20
        70
         50
         110
           60
            80
             2
```

Al dividir, cada vez que se obtiene el residuo 8 se repiten los cocientes y los residuos anteriores, por lo que al racional $\frac{73}{13}$ le corresponde la expresión decimal periódica $6.\overline{615384}$.

En general, en una fracción p/q, donde $q \neq 0$, al efectuar la división podrán aparecer a lo sumo q residuos distintos entre sí; por consiguiente, en determinado paso de la división se repetirá alguno de los residuos, y la expresión decimal será periódica.

Se dice que el periodo de una expresión decimal periódica es n si el grupo de dígitos que se repite a partir de cierto lugar consta de n dígitos. En el ejemplo anterior, el periodo es 6.

En forma recíproca, supóngase que se tiene una expresión decimal periódica se verá que siempre es posible escribirla en la forma p/q.

Sea $a = 0.8\overline{613}$, multiplíquense ambos miembros de la igualdad por 10^4,

$$10^4 a = 8613.\overline{613},$$

multiplíquese a por 10 y réstese el resultado de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} 10^4 a &= 8613.\overline{613} \\ 10\ a &= \quad\ 8.\overline{613} \\ \hline 9990\ a &= 8605 \end{aligned}$$

por lo que

$$a = \frac{8605}{9990}$$

El método consiste en multiplicar la expresión decimal a por una potencia de 10, de manera que el producto resultante tenga en su parte entera, una vez, los números localizados debajo de la raya. Después, se multiplica la expresión decimal a por una potencia de 10, para que en este producto aparezcan, en la parte entera, sólo los números no localizados debajo de la raya.

Observación Entre las potencias de 10 que pueden servir se haya 10^0. Por último, se resta el segundo resultado del primero y se despeja a.

En el caso especial donde el grupo de dígitos que se repiten está compuesto sólo por el cero, se tiene un procedimiento muy simple; por ejemplo:

si $a = 0.5603$, entonces $10^4 a = 5603$ y, por tanto, $a = \frac{5603}{10^4} = \frac{5603}{5^4 2^4}$

En general, para tales expresiones cabe encontrar una expresión p/q donde el denominador es producto de potencias de 5 y de 2. El ejercicio 1.8 contiene un resultado recíproco.

Recuérdese que $\sqrt{2}$ no es un número racional y, por el algoritmo para la extracción de la raíz cuadrada de un número, a $\sqrt{2}$ corresponde una expresión decimal no periódica (¿por qué?). Esto sugiere que puede asociarse a cada punto de la recta un número racional, o bien una expresión decimal no periódica.

Las expresiones decimales no periódicas se denominan números irracionales.

LA RECTA COORDENADA

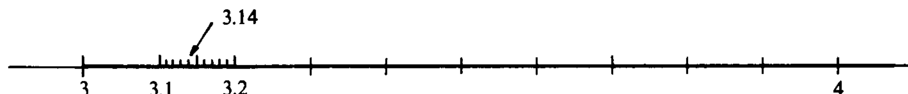
Por lo ya estudiado, es posible hacer corresponder a cada expresión decimal periódica un punto de la recta de la manera siguiente:

Se escribe tal expresión decimal periódica en la forma p/q y se hace corresponder a esta última expresión un punto de la recta en la forma ya señalada.

En caso de que la expresión decimal sea finita, el paso intermedio (escribirla como p/q) es innecesario, pues puede lograrse de manera directa, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Sea 3.14 la expresión decimal considerada; localícese en la recta ante todo la parte entera (en este caso es igual a 3); después, divídase en 10 partes iguales el segmento que une 3 con 4; tómese el primero de estos puntos (este punto representa a 3.1); a continuación, divídase en 10 partes el segmento que

une 3.1 con 3.2 y así, entonces, el cuarto punto de esta división representa la expresión 3.14.



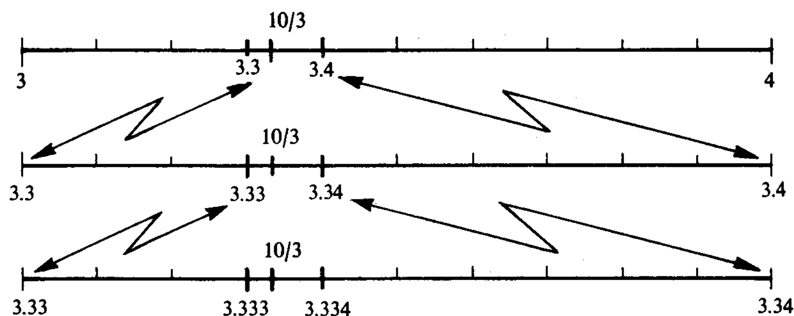
Ejercicio Localícese sobre la recta en la forma indicada, el punto correspondiente al número 2.718.

Nótese que, si para la expresión decimal periódica infinita

$$n_0 \cdot n_1 n_2 \cdots n_k \cdots$$

se consideran los puntos correspondientes a n_0, $n_0 \cdot n_1$, $n_0 \cdot n_1 n_2$, $n_0 \cdot n_1 n_2 n_3$, etc., determinados por la manera sugerida en el ejemplo anterior, estos puntos se aproximan a uno que será el correspondiente a la expresión decimal periódica.

EJEMPLO Considérese la expresión decimal 3.33...; en este caso, $n_0 = 3$, $n_0 \cdot n_1 = 3.3$, $n_0 \cdot n_1 n_2 = 3.33$, etc.



Sea $0.354\bar{3}$ una expresión decimal periódica; el punto correspondiente a 0.3543333 es una aproximación mejor al punto que determina sobre la recta la expresión decimal $0.354\bar{3}$, que aquella que proporciona el punto correspondiente a 0.3543; de aquí se infiere que, cuantas más cifras decimales se consideren, mejores aproximaciones al punto deseado se tendrán.

La manera de asociar un punto de la recta a una expresión decimal no periódica es semejante a la descrita en los párrafos anteriores para las expresiones periódicas infinitas.

De nuevo, con un ejemplo, se ilustrará ahora la forma de determinar la expresión decimal correspondiente a un punto P de la recta, tal que $\overrightarrow{OP}$ tiene dirección positiva.

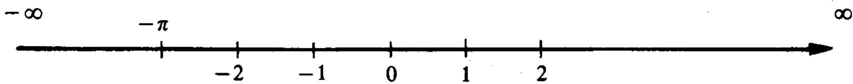
Supóngase, primero, que el punto se encuentra entre los enteros 0 y 1; entonces, la parte entera de la expresión decimal que le corresponde es el 0; después, divídase en 10 partes iguales el segmento que une 0 con 1 y búsquese en cuál está el punto. Si éste coincide con alguno de los extremos de los segmentos obtenidos, ya se tiene la expresión decimal que le corresponde (¿por qué?); en caso contrario, el punto tiene que estar comprendido en uno de los segmentos generados. Supónga-

se que se trata del tercer segmento; en este caso, se sabe que la primera cifra decimal es 2. Ahora divídase en 10 partes iguales el segmento que une $\frac{2}{10}$ con $\frac{3}{10}$; de nuevo, si el punto coincide con uno de los extremos, se habrá determinado la expresión decimal. De no ser así, se busca entonces el segmento en que se encuentra el punto. Supóngase que ahora se trata del octavo; por tanto, la segunda cifra decimal es 7, y así sucesivamente. En general, no es posible obtener, mediante este procedimiento, todas las cifras de la expresión decimal; sin embargo, una expresión decimal se considera determinada si es posible encontrar cualquiera de sus cifras decimales. Desde luego, esto puede hacerse en forma teórica mediante el método indicado, aunque quizá resulte tan laborioso que su realización parezca imposible.

Cuando OP tiene dirección negativa, se toma el punto Q simétrico de P respecto a O y se determina la expresión $n_0 \cdot n_1 n_2 \cdots$ correspondiente a Q.

La expresión que corresponde a P es, entonces, $-n_0 \cdot n_1 n_2 \cdots$.

En este texto será suficiente considerar que los números reales son expresiones decimales: periódicas (números racionales) y no periódicas (números irracionales); y, debido a la correspondencia establecida entre las expresiones decimales y los puntos de la recta, el conjunto de los números reales se representará gráficamente por una recta, como en la figura siguiente.



Esta recta recibe el nombre de recta coordenada, y el punto O asociado a 0 *es llamado el origen.*

Cabe aclarar que tanto $-\infty$ como ∞ no son números reales, son símbolos; en la figura indican la orientación de la recta a partir de un origen seleccionado con anterioridad.

Interpretaciones geométricas de algunas operaciones entre números reales

Antes se definió el concepto de segmento dirigido; ahora se definirá cuándo dos segmentos dirigidos son iguales entre sí:

Los segmentos dirigidos $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son iguales entre sí cuando tienen la misma longitud y dirección; es decir, son iguales cuando, por medio de una traslación, es posible hacer coincidir sus orígenes y sus extremos, respectivamente.



Figura 1.7

Así mismo, se ha visto que a cada número real le corresponde un punto de la recta. Con objeto de dar la interpretación geométrica de las operaciones, resultará

útil asociar cada número real a a cualquier segmento dirigido que sea igual al segmento OP, donde P es el punto correspondiente al real a.

Asociar un mismo número a varios objetos no debe ser nuevo para el lector. En efecto, con frecuencia se utilizan cintas para medir que tienen asociado en forma natural el número que representa su longitud; por ejemplo, muchas tienen asociado el número 1.50 y podemos usar cualquiera de ellas para medir 1.50 m.

Nota Es evidente que para cada número real a y cada punto P de la recta, puede encontrarse un segmento dirigido correspondiente al real a y cuyo origen sea el punto P.

Interpretación geométrica de la suma de dos números reales

Sean a y b dos números reales, considérense los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$ correspondientes a los reales a y b, respectivamente.

El segmento dirigido cuyo origen es O y cuyo extremo es B corresponde al real $a + b$ (Fig. 1.8). Así, el punto B es el correspondiente al número real $a + b$.

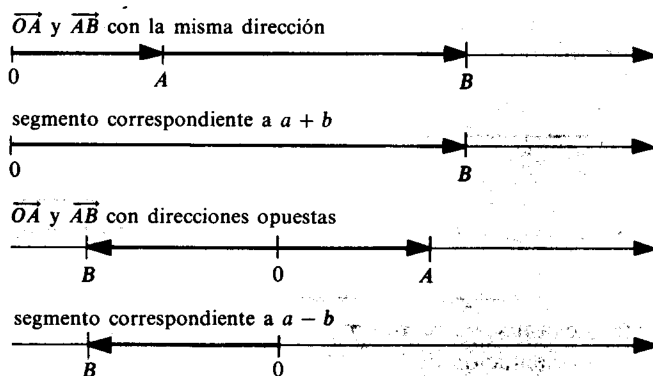


Figura 1.8

Interpretación geométrica del producto de dos números reales

Considérense dos rectas coordenadas L_1 y L_2 que se intersectan en O, y en cada una de las cuales se ha elegido el mismo segmento unitario.

Sean a y b dos números reales; considérense en la recta L_1 el segmento $\overrightarrow{OA}$ correspondiente al real a y en la recta L_2 el segmento $\overrightarrow{OB}$ correspondiente al real b (Fig. 1.9).

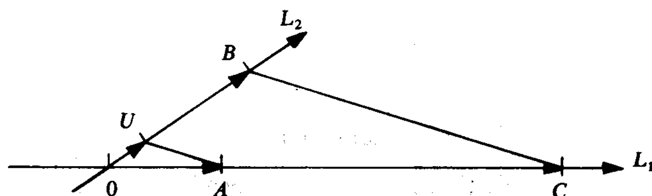


Figura 1.9

Ahora, multiplíquense los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$; para tal fin, considérese sobre la recta L_2 el segmento $\overrightarrow{OU}$ asociado al número real 1. Por medio de un segmento de recta, únanse los puntos U y A y trácese una paralela a ese segmento que pase por el punto B. La intersección de este segundo segmento de la recta L_1 se designará por C. Así, se obtiene el segmento dirigido $\overrightarrow{OC}$, que será el correspondiente al número real $a \cdot b$; por consiguiente, el punto C será, sobre la recta L_1, el correspondiente al real $a \cdot b$. En efecto, el triángulo OUA es semejante al triángulo OBC, por lo que se obtiene

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OU};$$

de donde

$$OC = \frac{OA \cdot OB}{OU}$$

Así,

$$OC = a \cdot b$$

Interpretación geométrica de a/b (donde $b \neq 0$)

De nuevo a y b denotan dos números reales, donde $b \neq 0$; como en el párrafo anterior, se consideran dos rectas coordenadas L_1 y L_2 y los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OU}$ con el mismo significado anterior. Por medio de un segmento de recta, únanse los puntos A y B y trácese, a través de U, una paralela a este segmento. La intersección de este segundo segmento con L_1 se designa por C. El segmento dirigido $\overrightarrow{OC}$ es el correspondiente al número real a/b; por consiguiente, el punto C corresponde, sobre la recta L_1, a dicho número real, pues los triángulos OUC y OBA son semejantes. Por tanto,

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OU}{OB}$$

Por ello,

$$OC = \frac{a}{b}$$

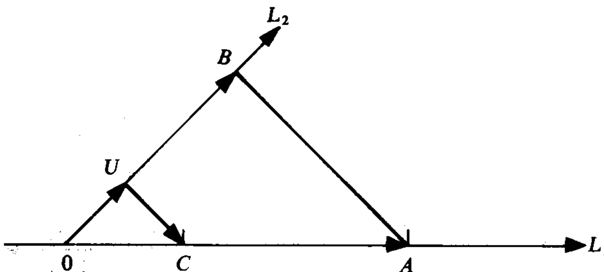


Figura 1.10

Cuando el punto B, correspondiente al número real b, se aproxima al O, correspondiente al número real 0, el punto C se aleja del origen O, de modo que que la recta UC tiende a ser paralela a L_1. En el caso límite donde B coincide con el origen O, las rectas serán paralelas y no habrá intersección: esto concuerda con nuestro conocimiento de la imposibilidad de dividir entre el número real cero.

Interpretación geométrica de la raíz cuadrada de un número real

Sea a un número real positivo; trácese una recta y márquese sobre ésta la distancia $OA = a$; ábrase el compás hasta alcanzar una longitud igual a 1; apóyese en A y márquese sobre la recta OA esta longitud; de este modo, $AB = 1$. (Véase Fig. 1.11.)

Trácese un círculo cuyo diámetro sea OB, y levántese por A una perpendicular a OB; intersétesela con la circunferencia; llámese C a esta intersección, y únase O con C y C con B. Así, se tienen dos triángulos rectángulos (por un resultado de geometría elemental, el ángulo OCB es recto), y como, además,

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

y

$$\beta + \gamma = 90^\circ,$$

entonces,

$$\alpha = \gamma,$$

con lo que

$$\Delta OAC \sim \Delta ABC,$$

de donde

$$\frac{x}{1} = \frac{a}{x},$$

por ello, finalmente,

$$x = \sqrt{a}$$

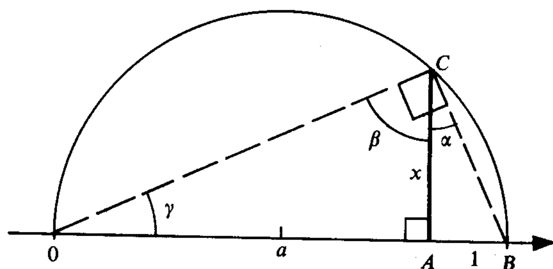


Figura 1.11

Propiedades de los números reales

De acuerdo con las interpretaciones geométricas de la suma y del producto recién estudiadas y la intuición y experiencia geométricas del lector, se encontrarán naturales las propiedades características de los números reales enunciadas a continuación.

Propiedades de la adición

A1. Para todo a y b reales, se tiene que $a + b$ es real. *(Cerradura.)*

A2. Para todo a y b reales, se tiene que $a + b = b + a$. *(Conmutatividad.)*

A3. Para todo a, b y c reales, se tiene que $(a + b) + c = a + (b + c)$. *(Asociatividad.)*

A4. Existe uno y sólo un elemento denotado por 0, tal que $a + 0 = a$ para todo real a. *(Existencia del elemento neutro aditivo.)*

A5. Para cada real a existe uno y sólo un elemento denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$. *(Existencia del elemento inverso aditivo o simétrico.)*

Propiedades de la multiplicación

M1. Para todo a y b reales, se tiene que ab es real. *(Cerradura.)*

M2. Para todo a y b reales, se tiene que $ab = ba$. *(Conmutatividad.)*

M3. Para todo a, b y c reales, se tiene que $(ab)c = a(bc)$. *(Asociatividad.)*

M4. Existe uno y sólo un elemento denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = a$ para todo real a. *(Existencia del elemento neutro multiplicativo.)*

M5. Para cada real a distinto de 0, existe uno y sólo un elemento denotado por a^{-1}, tal que $aa^{-1} = 1$. *(Existencia del recíproco o inverso multiplicativo.)*

D1. *Ley distributiva.* Para todo a, b y c reales, se tiene que $a(b + c) = ab + ac$. *(Distributividad del producto respecto a la suma.)*

Para ver otras propiedades de los números reales, se analizará primero con más amplitud la manera de comparar dos números reales entre sí.

Orden

a) *Orden en una recta dirigida*

Sean P y Q dos puntos de una recta dirigida. Se dice que P es menor que Q, o Q es mayor que P, cuando el segmento dirigido $\overline{PQ}$ tiene orientación positiva.

Notación:

$P < Q$ (se lee: P es menor que Q)
$Q > P$ (se lee: Q es mayor que P)

La relación de orden aquí definida tiene las propiedades siguientes: tricotomía y transitividad.

1. TRICOTOMÍA Esto significa que, para cada dos puntos A y B, se cumple una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$A < B, \qquad A > B \qquad \text{o} \qquad A = B$$

Si $A < O$ (donde O es el origen), se dice entonces que A es un punto negativo. De la misma forma, si $A > O$, se dice que A es un punto positivo.

2. TRANSITIVIDAD Si tres puntos A, B y C de la recta son tales que $A < B$ y $B < C$, entonces $A < C$.

b) *Orden de los números reales*

El orden visto para la recta induce un orden en los números reales de la manera siguiente:

Dados dos números reales a y b, se dice que $a < b$ si el punto A correspondiente al real a es menor que el punto B correspondiente al real b. Así, se tiene que con los números reales se cumple también la tricotomía y la transitividad para el orden dado; es decir,

O1. TRICOTOMÍA Para cada dos números reales a y b se cumple una, y sólo una, de las relaciones siguientes:

$$a < b, \qquad a > b \qquad \text{o} \qquad a = b$$

O2. TRANSITIVIDAD Si tres números reales a, b y c son tales que $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Por lo dicho para los puntos de la recta, si $a > 0$, entonces se dice que a es *positivo;* si $a < 0$, se dice que a es *negativo:* por la propiedad transitiva, se tiene que todo número positivo es mayor que cualquier número negativo.

En términos de expresiones decimales, la definición de orden que se ha introducido puede enunciarse así:

Sean $a = a_0 \cdot a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$ y $b = b_0 \cdot b_1 b_2 \cdots b_k \cdots$ dos números reales positivos, se dice que $a > b$ si el entero a_i es mayor que el entero b_i y los enteros correspondientes a índices menores que i coinciden.

Si a y b son números negativos, se dice entonces que $a > b$ si $-a < -b$. Obsérvese que $-a$ y $-b$ son números positivos en este caso, y como se vio, si $a > 0$ y $b < 0$, por ejemplo, entonces $a > b$ (por la transitividad).

O3. PROPIEDAD ARQUIMEDIANA Sean a y b dos números reales y $a > 0$. Existe un número natural n tal que $na > b$.

Esta propiedad interpretada geométricamente significa que, si se toman n copias consecutivas del segmento $\overrightarrow{OA}$, el extremo del último de tales segmentos es un punto mayor que el punto correspondiente a b (Fig. 1.12).

O4. Sean a y b dos números reales positivos, $a + b > 0$.

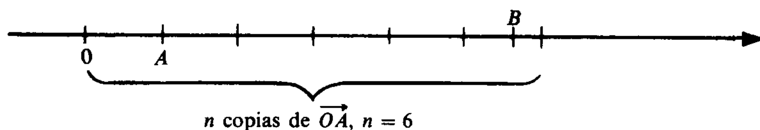


Figura 1.12

O5. Sean a y b dos números reales positivos, $ab > 0$.

O6. AXIOMA DEL SUPREMO Tanto el enunciado de esta propiedad como su análisis se posponen hasta el final de este capítulo.

De las propiedades anteriores se deducen las siguientes:

1. $a > b$ si, y sólo si, $a - b > 0$.

Demostración Sean A el punto correspondiente a a, B el correspondiente a b y C el correspondiente a $a - b$.

Si $a > b$, entonces $\overrightarrow{BA}$ tiene orientación positiva; por otra parte, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$, por lo que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, pero $-\overrightarrow{OB} = +\overrightarrow{BO}$, de donde $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}$, así $\overrightarrow{OC}$ tiene la misma orientación que $\overrightarrow{BA}$, esto es, C es un punto positivo o, lo que es igual,

$$a - b > 0$$

Ejercicio Demuéstrese la otra parte de la proposición.

2. Si $a > b$, entonces, para cualquier c real, se tiene que

$$a + c > b + c$$

Demostración Por la propiedad 1, se sabe que $a > b$ equivale a escribir $a - b > 0$; si se suma y se resta un mismo número a otro dado, se sabe, por la propiedad del simétrico, que éste no se altera; entonces, súmese $c - c$ a $a - b$, y agrúpese; así se obtendrá que $(a + c) - (b + c) > 0$ y, por tanto, $a + c > b + c$ (de nuevo por la propiedad 1).

3. Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

4. Si $c > 0$ y $a > b$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

Demostración $a > b$ implica que $a - b > 0$ (por la propiedad 1); como c es positivo, entonces la propiedad O5 muestra que $c(a - b) > 0$. Por último, al distribuir, se tiene la propiedad enunciada.

5. $c > 0$ si, y sólo si, $-c < 0$.

Demostración Si $c > 0$, entonces, según la propiedad 2, se tiene que $c - c > -c$, pero $c - c = 0$, de donde se sigue la propiedad enunciada. La otra parte de la afirmación se prueba en forma análoga.

6. Si $c < 0$ y $a > b$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

7. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

8. Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $a \cdot c < b \cdot d$.

Demostración Conforme a la propiedad 4, se tiene que $a \cdot c < b \cdot c$, y también que $b \cdot c < b \cdot d$. Así, entonces, por la propiedad transitiva del orden en los números reales, se tiene la propiedad enunciada.

9. $1/a$ $(a \neq 0)$ tiene el mismo signo que a (es decir, ambos positivos o ambos negativos).

10. Si $a < b$ y, además, tienen el mismo signo, entonces $1/a > 1/b$.

Demostración Por la propiedad 1, se tiene que $b - a > 0$; por otro lado, al ser a y b del mismo signo, su producto $a \cdot b$ es positivo (¿por qué?). Así, de acuerdo con la propiedad O4 y las propiedades 4 y 9, se tiene que

$$\frac{b - a}{ba} = 1/a - 1/b > 0$$

11. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Entonces, $a^2 < b^2$ si, y sólo si, $a < b$.

Demostración Supóngase primero que $a^2 < b^2$, entonces tenemos que ver que $a < b$. Por la propiedad 1, se sabe que $b^2 - a^2 > 0$ o, lo que es igual, $(b - a)(b + a) > 0$; entonces, por la propiedad O5, $(b - a)$ tiene que ser positivo, de donde $a < b$. De manera recíproca, si $a < b$, queremos ver que $a^2 < b^2$, entonces, por la propiedad 1, se tiene que $b - a > 0$; y como $b + a$ es positivo, al multiplicarlo por $b - a$ resulta que $b^2 - a^2 > 0$, de lo cual se sigue la propiedad.

En ocasiones se usa la notación $x \leqslant y$, para indicar que x es menor o igual que y, pero no debe pensarse que ambas posibilidades pueden darse en forma simultánea, sino que, a lo sumo, x podrá valer y.

EJEMPLO 1 $2 \leqslant 7$. Esto es cierto dado que $2 < 7$.

EJEMPLO 2 $2 \leqslant 2$. Esto es cierto dado que $2 = 2$.

A los símbolos $<$ y $>$ se les denomina signos de desigualdad estricta, y a $\leqslant$ y $\geqslant$, signos de desigualdad no estricta o suave.

INTERVALOS

Si $a < b$, entonces el conjunto de los números comprendidos entre a y b recibe el nombre de *intervalo abierto*. (Obsérvese que en la colección no aparecen a ni b.)

Por (a, b) se denota al intervalo abierto. Es decir,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}^* \qquad \text{[Fig. 1.13(a)]}$$

* Recuérdese que $\{x \mid a < x < b\}$ se lee: conjunto de x tales que x es mayor que a y menor que b.

Si en la colección anterior se incluyen los extremos a y b, se obtiene entonces un *intervalo cerrado* el cual se denota por $[a, b]$; o sea,

$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ [Fig. 1.13(b)]



Figura 1.13

Si el intervalo contiene sólo uno de los extremos, se dice que es *semiabierto;* a saber, se tienen los dos casos siguientes:

$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ (semiabierto por la izquierda) [Fig. 1.14(a)]
$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ (semiabierto por la derecha) [Fig. 1.14(b)]



Figura 1.14

Por último, puede también hablarse de intervalos «infinitos», como los mostrados en la figura 1.15, o sea, dichos intervalos se caracterizan siguiendo el orden en que aparecen en la figura, de la manera siguiente:

(a) $[a, \infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$
(b) $(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$
(c) $(a, \infty) = \{x \mid a < x\}$
(d) $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$

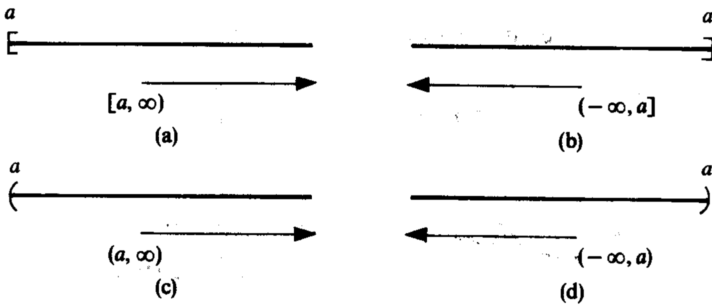


Figura 1.15

INECUACIONES

Recuérdese que una ecuación de primer grado es una expresión del tipo siguiente:

$ax + b = 0$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$,

y una solución de esta ecuación es un número c tal que al sustituir x por c se obtiene una identidad. Más aún, $c = -b/a$ es la única solución.

Cuando en una ecuación de primer grado se sustituye el signo de igualdad por alguno de desigualdad, estricta o no estricta, es decir, $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, se obtiene lo que se denomina una inecuación de primer grado.

Una solución de una inecuación es un número real c tal que al sustituirlo en la inecuación se obtiene una desigualdad verdadera.

EJEMPLO Considérese la inecuación $-3x - 1 > 0$. El número $-\frac{3}{2}$, es una solución; en efecto, al sustituir x por este valor, se obtiene la desigualdad verdadera $\frac{7}{2} > 0$.

Obsérvese que existen más soluciones, por ejemplo, $-\frac{1}{2}$, -1, -10, etc. El significado de resolver una inecuación es caracterizar todas sus soluciones. En este ejemplo, todos los números reales menores que $-\frac{1}{3}$ son soluciones de la inecuación dada; así, el conjunto de soluciones es el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{3})$. En efecto, para resolver la ecuación se despeja x; las propiedades de orden permiten despejar x en las inecuaciones, utilizando las mismas técnicas de las ecuaciones, y cuidando que al multiplicar o dividir por un número negativo se invierte la desigualdad. Al despejar x de la inecuación $-3x - 1 > 0$, se obtiene $x < -\frac{1}{3}$.

El concepto de inecuación de primer grado puede extenderse a grados superiores. En seguida se verá un método para resolver inecuaciones de segundo grado.

Considérese la inecuación $ax^2 + bx + c < 0$. Si la ecuación asociada $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales, entonces cualquier número real es solución de la inecuación, o bien ésta no tiene solución, dependiendo de que c sea negativo o positivo, respectivamente. Esto se nota con facilidad en la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, que es una parábola (Fig. 1.16).

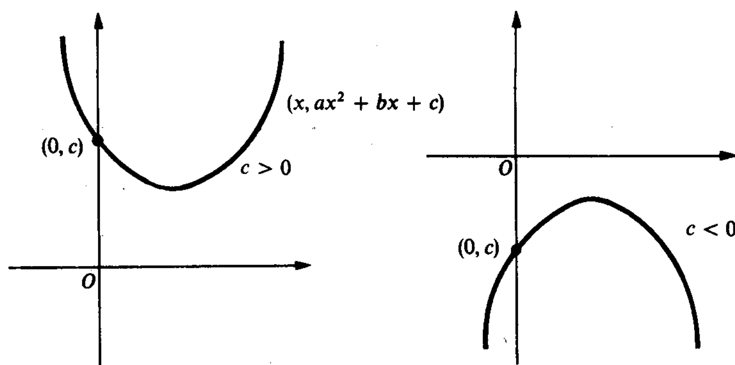


Figura 1.16

Supóngase ahora que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces reales, y recuérdese que si r_1 y r_2 son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$, donde $r_1 \leqslant r_2$.

Si la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ tiene una única solución r_1, entonces cualquier número real, excepto r_1, es una solución de la inecuación, o bien ésta no tiene solución, dependiendo de que a sea negativa o positiva, respectivamente. En efecto, en este caso, $r_1 = r_2$ y, por tanto, $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)^2$, de donde se sigue nuestra afirmación.

Por último, si las soluciones de la ecuación son distintas, se concluye, a partir de la igualdad $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)\cdot(x - r_2)$, que el conjunto solución es (r_1, r_2) si $a > 0$, y $(-\infty, r_1) \cup (r_2, \infty)$ si $a < 0$ (Fig. 1.17).

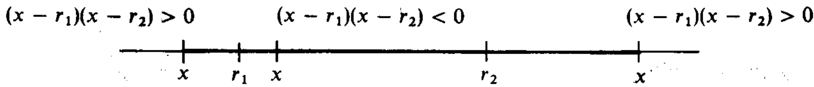


Figura 1.17

Nota Las soluciones de inecuaciones no estrictas son las soluciones de la ecuación y la inecuación estricta asociadas.

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real a, denotado por $|a|$, se define de la manera siguiente:

$$|a| = a \quad \text{si } a \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad |a| = -a \quad \text{si } a < 0$$

Nótese que $|a| \geqslant 0$ y es la longitud del segmento $\overrightarrow{OA}$, donde A es el punto que corresponde a a.

EJEMPLOS

(a) $|1| = 1$

(b) $|0| = 0$

(c) $|-1| = -(-1) = 1$

A continuación se enunciará una serie de propiedades del valor absoluto y se demostrarán algunas de ellas, quedando las restantes como ejercicios para el lector (sin que presenten ninguna dificultad especial).

PROPIEDAD 1 Para todo x, se tiene que

$$|x|^2 = x^2$$

PROPIEDAD 2 Para todo x, se tiene que

$|x| = \sqrt{x^2}$ (con $\sqrt{\ }$ se denota la raíz cuadrada no negativa).

Demostración Por la propiedad 1, se tiene que $|x^2| = x^2$; por tanto, $|x|$ es la raíz cuadrada (no negativa) de x^2.

PROPIEDAD 3 Para todo x, se tiene que

$$|-x| = |x|$$

Demostración Por la propiedad anterior, resulta

$$|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

PROPIEDAD 4 Sean x e y números reales arbitrarios, entonces

$$|x \cdot y| = |x||y|$$

Demostración

$$|x \cdot y| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

PROPIEDAD 5 Para todo x, se tiene que

$$x \leqslant |x| \qquad \text{y} \qquad -x \leqslant |x|$$

PROPIEDAD 6 Sean x e y números reales arbitrarios, entonces

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Esta desigualdad se conoce como *desigualdad del triángulo.*

Demostración Por la propiedad 1, se tiene

$$|x + y|^2 = (x + y)^2$$

Por tanto,

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 \text{ (por la propiedad 5)}$$
$$= (|x| + |y|)^2,$$

y por la propiedad 11 de la página 20, se tiene, por último, que

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

PROPIEDAD 7 Supóngase que $d > 0$. Entonces,

$$|x| < d \Leftrightarrow -d < x < d$$

Demostración Se sabe que $x \leqslant |x| < d$, y, además, que $-x \leqslant |x| < d$. De la primera desigualdad se concluye que $x < d$, y de la segunda, $-x < d$; de donde $-d < x < d$.

Ahora supóngase que $-d < x < d$; entonces, debe probarse que $|x| < d$. De las hipótesis, se observa que

$$0 < x + d \qquad \text{y} \qquad d - x > 0$$

Como el producto de dos números positivos es positivo, en consecuencia $(x + d)(d - x) > 0$, o lo que es igual, $d^2 - x^2 > 0$; o sea, $x^2 < d^2$; pero como $|x|^2 = x^2$, se tiene, por último, $|x| < d$.

Geométricamente, la propiedad 7 establece: dado que $|x|$ es la distancia entre 0 y x en la recta, los puntos localizados a menor distancia que d del origen son los números reales comprendidos entre $-d$ y d.

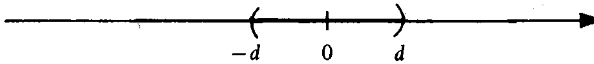


Figura 1.18

En general, la distancia entre dos puntos A y B de la recta se define como $d(a, b) = |a - b|$, donde a y b son los números correspondientes a A y B.

A partir de las propiedades enunciadas del valor absoluto, se deduce que:

$$d(a, b) \geqslant 0 \quad \text{y} \quad d(a, b) = 0 \quad \text{si, y sólo si, } a = b.$$

$$d(a, b) = d(b, a)$$

$$d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$$

En la propiedad 7 del valor absoluto se encuentran las soluciones de la desigualdad $|x| < d$. En seguida, y utilizando esa propiedad, se exponen dos ejemplos de solución de inecuaciones donde interviene el valor absoluto.

EJEMPLO 1 Encuéntrense las soluciones de $|x - 3| < 2$.

$$|x - 3| < 2 \text{ si, y sólo si, } -2 < x - 3 < 2$$

y

$$-2 < x - 3 < 2 \text{ si, y sólo si, } 1 < x < 5$$

Así, el conjunto de soluciones es el intervalo $(1, 5)$.

EJEMPLO 2 Encuéntrense las soluciones de $|x + 2| \leqslant 1$.

$$|x + 2| \leqslant 1 \text{ si, y sólo si, } -1 \leqslant x + 2 \leqslant 1$$

Así, el conjunto de soluciones es el intervalo $[-3, -1]$.

Estos dos ejemplos sugieren los resultados generales: $|x - a| < d$ si, y sólo si, x pertenece al intervalo $(a - d, a + d)$ y $|x - a| \leqslant d$ si, y sólo si, x pertenece al intervalo $[a - d, a + d]$.

Obsérvese que en el ejemplo 2, $a = -2$.

ELEMENTOS MAXIMO Y MINIMO DE UN CONJUNTO

Considérese un subconjunto A de los números reales, no vacío. Un número real M es el elemento máximo de A si:

1) $M \in A$,
2) $M \geqslant a$, para todo $a \in A$;

en ese caso se escribe $M = \text{máx}\, A$.

Un ejemplo evidente de un conjunto sin elemento máximo es el conjunto de los números naturales.

EJEMPLOS

1. Sea $A = \{0, 9, 4\}$, entonces, $\text{máx}\, A = 9$.
2. Sea $S = [-28, -3]$, entonces $\text{máx}\, A = -3$.
3. Sea $A = \{..., -8, -7, -6\}$, entonces, $\text{máx}\, A = -6$.
4. Sea $A = [\sqrt[3]{\pi}, e^{\sqrt{\pi}}]$, entonces, $\text{máx}\, A = e^{\sqrt{\pi}}$.
5. Sea $A = \{3\}$, entonces, $\text{máx}\, A = 3$.
6. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 2\}$, entonces, $\text{máx}\, A = \sqrt{2}$.
7. Sea $A = \{0, 2, 4, ...\}$, en este caso no existe elemento máximo, ya que dado un número natural n siempre puede encontrarse otro número natural par que lo supera.
8. Sea $A = (0, 1)$, en este caso no existe elemento máximo, ya que si $x \in (0, 1)$, entonces el elemento $\dfrac{1 + x}{2}$ pertenece a $(0, 1)$ y es mayor que x (Ejercicio 1.23). Así, no existe ningún elemento que cumpla con 1) y 2).

Es claro que todo subconjunto de los números reales, no vacío y finito, tiene elemento máximo.

En forma análoga, sea A un subconjunto de los números reales, no vacío. Un número real m es el elemento mínimo de A, si:

1) $m \in A$, y
2) $m \leqslant a$ para todo $a \in A$;

en este caso se escribe $m = \text{mín}\, A$.

EJEMPLOS

Considérense los conjuntos vistos en los ejemplos anteriores.

1. $\text{mín}\, A = 0$.
2. $\text{mín}\, A = -28$.
3. No existe elemento mínimo.
4. $\text{mín}\, A = \sqrt[3]{\pi}$.
5. $\text{mín}\, A = 3$.
6. $\text{mín}\, A = -\sqrt{2}$.
7. $\text{mín}\, A = 0$.
8. No existe elemento mínimo.

Es evidente también que todo subconjunto no vacío de los números reales y finito tiene elemento mínimo.

Si A es infinito, puede tener máximo (mínimo), como sucede para el conjunto del ejemplo 6. Así mismo, el conjunto del ejemplo 8 es un conjunto infinito que no posee máximo ni mínimo.

EL AXIOMA DEL SUPREMO

Considérese el intervalo $[a, b]$ (Fig. 1.19). Se dice que un número es una *cota superior* de $[a, b]$, si se encuentra a la derecha de b o bien coincide con b.

En forma análoga, se dice que un número real es una *cota inferior* de $[a, b]$, si se encuentra a la izquierda de a o coincide con a.

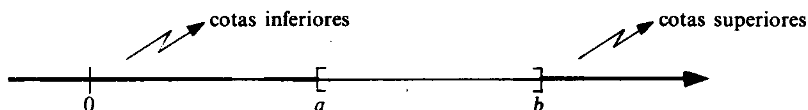


Figura 1.19

(Siempre que se hable de derecha o izquierda se estará considerando una recta como la mostrada en la figura.)

Así, entonces, la colección de cotas superiores de $[a, b]$ es el intervalo $[b, \infty)$ y la de las cotas inferiores es el intervalo $(-\infty, a]$.

En general, una *cota superior* de un conjunto A de números reales no vacío es un real Ω tal que $\Omega \geqslant a$ para todo $a \in A$; una *cota inferior* de A es un real ω tal que $\omega \leqslant a$ para todo $a \in A$. Obsérvese que una cota puede pertenecer o no al conjunto.

Se dice que un conjunto A de números reales, no vacío, está *acotado superiormente, acotado inferiormente o acotado,* si tiene una cota superior, una cota inferior o ambas cotas, respectivamente.

EJEMPLOS

(a) $A = [-14, -1]$ está acotado.

(b) $A = \{-38, ..., -2, 0\}$ está acotado.

(c) $A = \{..., -4, -2, 0\}$ 0 es una cota superior, de A, pero A no está acotado inferiormente.

(d) $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$; Z no tiene cotas superior ni inferior.

(e) $A = (0, 1)$ está acotado. Obsérvese que 0 es cota inferior, pero no pertenece al conjunto; en forma análoga, 1 es cota superior y tampoco pertenece al conjunto.

En los ejemplos analizados, las colecciones S e I de cotas superiores e inferiores, respectivamente, son:

(a) $S = [-1, \infty)$; $I = (-\infty, -14]$.

(b) $I = (-\infty, -38]$; $S = [0, \infty)$.

(c) $S = [0, \infty)$; $I = \phi$*.
(d) $I = \phi$; $S = \phi$.
(e) $I = (-\infty, 0]$; $S = [1, \infty)$.

De lo anterior se concluye que si un conjunto tiene elemento máximo, entonces está acotado superiormente, y este elemento máximo es la mínima de las cotas superiores. De manera similar, si un conjunto tiene elemento mínimo, entonces está acotado inferiormente y este elemento mínimo es la máxima de las cotas inferiores.

DEFINICION 1.1 *Sea A un conjunto de números reales, no vacío, acotado superiormente. Un número real c es llamado el supremo de A si c es la mínima cota superior de A. En este caso, se escribe $c = \sup A$.*

En forma análoga,

DEFINICION 1.2 *Sea A un conjunto de números reales, no vacío, acotado inferiormente. Un número real d es llamado el ínfimo de A si d es la máxima cota inferior de A. En este caso se escribe $d = \inf A$.*

Por lo antes dicho, si un conjunto A tiene máximo M, entonces $M = \sup A$, y si tiene mínimo m, entonces $m = \inf A$.

La siguiente propiedad de los números reales postula la existencia del supremo (ínfimo).

O6. AXIOMA DEL SUPREMO *Si A es un conjunto de números reales, no vacío y acotado superiormente, entonces existe el supremo de A.*

En forma análoga puede enunciarse el axioma del ínfimo.

La propiedad de la existencia del supremo caracteriza, junto con las propiedades ya vistas (A1-A5, M1-M5, D1, O1-O5), a los números reales.

Propiedades características del supremo

Si $c = \sup A$, entonces:

1) $c \geqslant a$ para todo $a \in A$.

Ya que c es la mínima de las cotas superiores y por la definición del elemento mínimo de un conjunto, se sigue que c pertenece al conjunto de cotas superiores, o sea, c está a la derecha del conjunto.

2) Sea $d < c$. Existe $a \in A$ tal que $d < a$ y $a \leqslant c$ (Fig. 1.20).

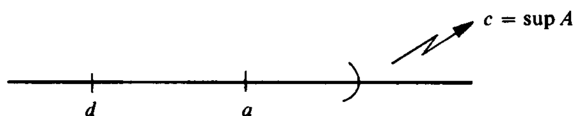


Figura 1.20

* Este símbolo representa el conjunto vacío.

En efecto, como $d < c$, d no es cota superior de A. Por consiguiente, existe $a \in A$ tal que $d < a$, y por 1), $a \leqslant c$.

La propiedad 2) dice que si se retrocede a un punto d, localizado a la izquierda de c, puede hallarse un elemento de A que se encuentre entre d y c.

Puede probarse que si un número cumple con 1) y 2), entonces es el supremo de A. Es decir, 1) y 2) caracterizan al supremo de un conjunto.

EJEMPLOS

1. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$.

   Por el axioma del supremo, el supremo existe y es el número que llamamos $\sqrt{2}$.

2. Sea $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, (n-1)/n, \ldots\}$ $\sup A = 1$.

   En efecto, $n - 1 < n$ implica que $\dfrac{n-1}{n} < 1$, y si $d < 1$, entonces $\dfrac{1}{\quad} > 0$.

   Así, existe n tal que

$$n > \frac{1}{1-d}$$

   De donde

$$n(1-d) >$$

   es decir,

$$n - nd >$$

   por lo que

$$n - 1 > nd$$

   y

$$\frac{n-1}{n} > d$$

Hemos probado que 1 satisface para A las propiedades 1) y 2) que caracterizan al supremo.

EJERCICIOS

1.1 De acuerdo con el método descrito en el texto, localícense en la recta los racionales siguientes:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{24}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $-\frac{2}{5}$
e) $-\frac{3}{8}$ f) $\frac{2}{3}$ g) $-\frac{2}{3}$ h) $-\frac{5}{7}$

1.2 Localícense en la recta los racionales siguientes:

a) 0.283 b) 2.07 c) 0.333
d) −1.271 e) −4.22 f) 9.999

1.3 Demuéstrese que el cuadrado de un entero z es par si, y sólo si, z es par, y que es impar si, y sólo si, z es impar.

1.4 Se dice que a divide a b, con $a, b \in \mathbb{Z}$, si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Sea p un número primo, demuéstrese que p divide a z^2 si, y sólo si, p divide a z. [*Sugerencia:* Usese el teorema fundamental de la aritmética.]

1.5 Pruébese que $\sqrt{p}$, donde p es primo, es irracional. [*Sugerencia:* Usese el Ejercicio 1.4 y siga la demostración dada para probar que $\sqrt{2}$ es irracional.]

1.6 Sean a racional y b, c irracionales. Pruébese que:

a) $a + b$ es irracional.
b) $a \cdot b$ es irracional si $a \neq 0$.
c) $b \cdot c$ puede ser racional o irracional; ilústrese con ejemplos. [*Sugerencia:* Si $b \neq 0$, entonces $1/b$ es irracional.]
d) $b + c$ puede ser racional o irracional; ilústrese con ejemplos. [*Sugerencia:* Obsérvese que $-b$ es irracional.]

1.7 Dé la expresión decimal o la forma p/q, según sea el caso, para los números racionales siguientes:

a) 7.385 b) $-\frac{44}{7}$, c) $\frac{15}{17}$ d) $-3.\bar{2}57$
e) $\frac{11}{12}$ f) $-0.1\overline{473}$ g) $0.\bar{9}$

1.8 Pruébese que si $p, q \in \mathbb{Z}$ y q es un producto de potencias de 5 y de 2, entonces p/q es un número racional con una expresión decimal que termina; es decir, a partir de cierta posición decimal aparece sólo el cero.

1.9 Hágase la construcción geométrica correspondiente al cociente de dos números negativos.

1.10 Pruébese que los números racionales satisfacen las propiedades de la adición y de la multiplicación enunciadas para los números reales.

1.11 A partir de las propiedades características dadas para los números reales, pruébense los enunciados siguientes (que nos resultan familiares):

a) $a \cdot 0 = 0$ b) $-1 \cdot a = -a$ c) $-(-a) = a$
d) $-a \cdot -b = ab$ e) $2a = a + a$

1.12 Se dice que los números reales $b_1, b_2, ..., b_n$ forman una *progresión geométrica* si existe $c \in \mathbb{R}$, llamada razón de la progresión, tal que $b_i = cb_{i-1}$ para todo $i = 2, ..., N$. Por ejemplo: $2^2, 2^4, 2^6, ..., 2^n$. Sea $b_1, b_2, ..., b_n$ una progresión geométrica; pruébese que $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \dfrac{cb_n - b_1}{c - 1}$, si $c \neq 1$, donde c es la razón de la progresión. [*Sugerencia:* Llámese S_n a la suma $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ y considérese la diferencia $cS_n - S_n$.]

1.13 Calcúlese la suma de cada una de las progresiones siguientes:

a) $1 + 5 + 25 + \cdots + 5^6$
b) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^8}$
c) $2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{12}$
d) $2^0 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63}$
(Igual al número de granos de trigo solicitado como premio por el inventor del ajedrez.)

1.14 ¿Se altera la fórmula si la razón es negativa?

1.15 Calcúlense las sumas siguientes:

a) $1 - b + b^2 - \cdots - b^{23}$

b) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{16}}$

1.16 Si $a \geqslant 0$, entonces $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (desigualdad de Bernoulli). [*Sugerencia:* Obsérvese que

$$1 + (1 + a) + (1 + a)^2 + \cdots + (1 + a)^{n-1} = \frac{(1 + a)^n - 1}{a}.]$$

1.17 a) ¿Se cumple $x + 1 > x$ para todo x?

b) ¿Se cumple $x^2 > x$ para todo x?

c) ¿Se cumple $x + x > x$ para todo x?

1.18 Sean a, b, c y d números reales positivos tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Muéstrese que

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

1.19 Muéstrese que si a y b son reales positivos, entonces $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a + b}{2}$.

1.20 Sea $\varepsilon > 0$. Pruébese que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < \varepsilon$.

1.21 Sea $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Pruébese que $m^n \geqslant n$. [*Sugerencia:* Usese la desigualdad de Bernoulli.]

1.22 Pruébese que para la m del ejercicio anterior y $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m^n} < \varepsilon$.

1.23 Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leqslant b$, pruébese que $a \leqslant \frac{a + b}{2} \leqslant b$. Si la primera desigualdad es estricta, entonces las otras también lo son.

1.24 Resuélvanse las inecuaciones siguientes:

a) $3x + 5 < x - 7$ b) $x - 3 > 0$

c) $(x + 1)(x - 2) < 0$ d) $(x - 1)(x + 1) > 0$

e) $x^2 - 2 \leqslant 1$ f) $x(x + 1) \geqslant 0$

g) $(x - 5)^2(x + 10) \geqslant 0$ h) $3(x - 1)(x - 4) \geqslant 0$

i) $(x + 1)(x + 2) \geqslant 0$ j) $5(x + 1)(x - 2) < 0$

k) $5(x - 2)^2 \geqslant 0$ l) $x^2 + 3x + 3 > 0$

m) $3x^2 + 10 + 3 \geqslant 0$ n) $-x^2 + 2x - x \leqslant 0$

ñ) $\frac{7}{x - 1} - \frac{6}{x^2 - 1} < 5$ o) $\frac{6}{x + 3} + \frac{1}{x - 2} > 0$

1.25 Pruébese que si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. [*Sugerencia:* Escríbase $a = \frac{a}{b} b$.]

1.26 Pruébese que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$. [*Sugerencia:* Escríbase $a = a - b + b$ y aplíquese la desigualdad del triángulo.]

1.27 Resuélvanse las inecuaciones siguientes:

a) $|x^2 - 2| < 1$ b) $|2x + 1| \leqslant 1$ c) $|x - 5| < 2$

d) $|x - 3| > 7$ e) $\left|\dfrac{3 - 2x}{2 + x}\right| < 4$ f) $\left|\dfrac{x + 3}{6 - 5x}\right| \leqslant 2$

g) $\left|\dfrac{x + 1}{3x - 2}\right| < 5$ h) $|2 + 5x| \leqslant 1$ i) $|x(x + 1)| < |x + 4|$

1.28 Demuéstrese que si $|x| < 1$, entonces:

a) $\left|\dfrac{x + 1}{x - 2}\right| < 2$ b) $\left|\dfrac{x - 2}{x + 3}\right| < \dfrac{3}{2}$

1.29 Demuéstrese que si $|x - 2| < 1$, entonces $|x^2 - 4| < 5$.

1.30 Demuéstrese que si $|x - 2| < 0.1$, entonces $|x^2 - 4| < 0.41$.

1.31 Demuéstrese que si $|x - 2| < a$, entonces $|x^2 - 4| < 4a + a^2$.

1.32 Determínense los intervalos que son el conjunto de soluciones de cada una de las inecuaciones siguientes:

a) $|x| < 15$ b) $|-x| < 2$ c) $|x - 3| < 1$

d) $|x + 4| \leqslant 3$ e) $|5x - 1| < \dfrac{3}{5}$ f) $|x + 1| \leqslant 1$

g) $\left|\dfrac{3}{5}x + \dfrac{3}{5}\right| < 45$ h) $|9x - 2| \leqslant 9$

1.33 Determínense el supremo y el ínfimo en $\mathbb{R}$ de cada uno de los conjuntos siguientes:

a) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 4 < 6, x > 0\}$

b) $T = \{z \in \mathbb{Q} \mid 2z^3 - 1 < 15, z > 0\}$

c) $R = \left\{\dfrac{1}{p} \mid p \text{ es primo}\right\}$

[*Sugerencia:* Dése por sabido que hay una infinidad de números primos.]

d) $W = \{t \in \mathbb{R} \mid t^3 + 1 \leqslant 3\}$

e) $O = \left\{\dfrac{1}{3^n} \mid n \geqslant 1\right\}$

f) $P = \left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n \mid n \geqslant 1\right\}$

g) $U = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x - 1 < 0, x < 0\}$

1.34 Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos, acotados superiormente. Se define

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\};$$

demuéstrese que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Galileo Galilei
(1564 a 1642)

Está considerado como el genio que sentó las bases de la ciencia moderna al establecer una relación entre la experimentación y la teoría.

Como matemático, es uno de los más ilustres antecesores del cálculo, pues al desarrollar sus estudios sobre el movimiento, inició el camino hacia su avance ulterior. Estudió matemáticas con un tutor privado. A los 25 años de edad fue conferencista en la Universidad de Pisa, y más tarde, profesor de matemáticas en la Universidad de Padua.

Defendió y difundió las ideas de Copérnico sobre la teoría heliocéntrica del universo, suscitándose un conflicto entre él y la Iglesia católica (la cual le exoneró en 1983). Desarrolló el telescopio astronómico y descubrió cráteres en la Luna, manchas solares, satélites de Júpiter y las fases de Venus.

Propuso la ley de aceleración para la caída libre de los cuerpos y sugirió el uso del péndulo en los relojes.

Murió el 8 de enero de 1642, en Arcetri, cerca de Florencia, bajo arresto domiciliario por la Inquisición.

En forma paralela a la vida de Galileo se destacan en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Calderón de la Barca: *El alcalde de Zalamea,* 1633; *La vida es sueño,* 1634.
Cervantes: *Don Quijote,* 1605; *Don Quijote (segunda parte),* 1615.
Tirso de Molina: *El burlador de Sevilla,* 1630; *El condenado por desconfiado,* 1635.

MUSICA

Bataille: *Primer libro de arias,* 1608.
Frescobaldi: *Los capricci,* 1615.

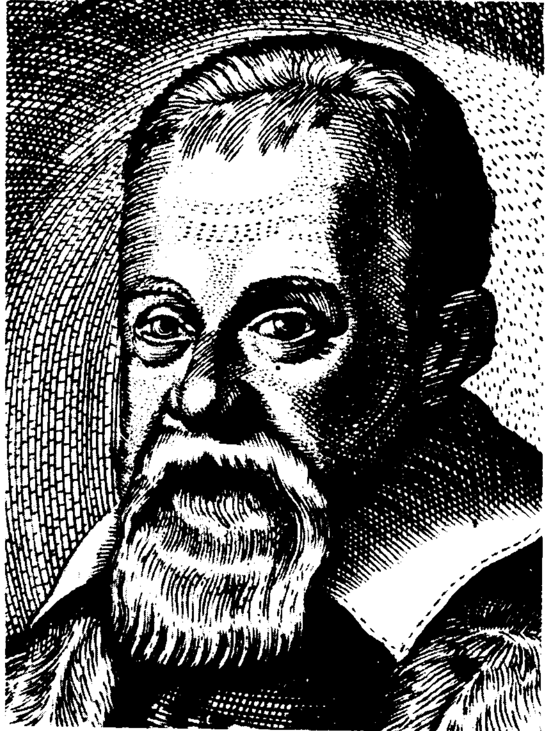
PINTURA

Murillo: *Virgen del Rosario,* 1642.

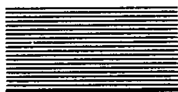
Rembrandt: *Lección de anatomía*, 1632; *Ronda nocturna*, 1642.
Velázquez: *Vieja friendo huevos*, 1618; *Los borrachos*, 1628.

CULTURA EN GENERAL

Fundación de la Academia Francesa, 1635; primer teatro lírico, el teatro San Lessiano, Venecia, 1637.



Galileo Galilei



2 FUNCIONES

En nuestro quehacer cotidiano se intuye la existencia de relaciones entre ciertas magnitudes; de hecho ésta se observa al admirar la potencia de un automóvil, o bien al intentar mover un objeto pesado usando un barrote a modo de palanca, etc.

En nuestros cursos elementales de física se estudian tales relaciones a través de fórmulas. A continuación, se plantean algunas de estas relaciones, de las cuales se abstraerá el concepto fundamental de función.

1. *Ley de las palancas.* Supóngase que desea levantar una caja que pesa p kilogramos. Para tal fin utilizamos una palanca; la ventaja de hacerlo consiste en reducir el esfuerzo para poder levantar la caja. Fijemos un punto de apoyo y coloquemos la palanca como se ilustra en la figura 2.1.

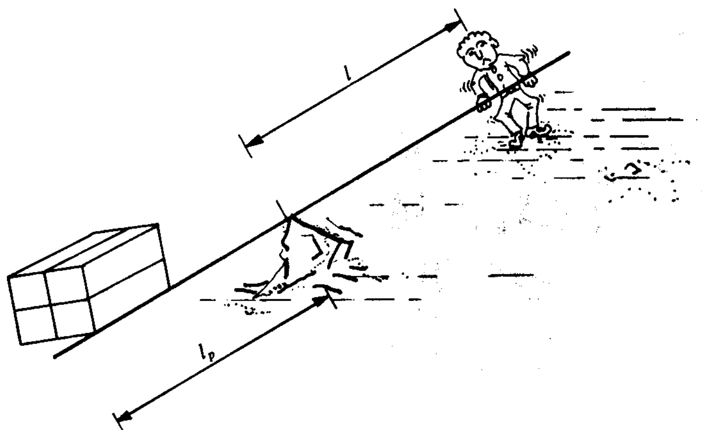


Figura 2.1

La fuerza F necesaria para levantar la caja está dada por

$$F = \frac{p \cdot l_p}{l},$$

donde p es el peso de la caja; l_p, la distancia del punto de apoyo a la caja, y l, la distancia del punto de apoyo al punto donde se aplica la fuerza.

Despreciamos el peso de la palanca y consideramos, además, que no hay fricción en el punto de apoyo. Obsérvese que, al dejar fijo el punto de apoyo y aumentar la distancia de éste al punto donde se aplica la fuerza, el esfuerzo que hay que realizar es menor.

2. Si se trata de saber la profundidad de un pozo, se recurre a lanzar una piedra dentro del mismo. Si, por ejemplo, el sonido de la piedra al chocar con el agua tarda mucho en llegar a nosotros, concluimos que el pozo es profundo. En realidad, la distancia h recorrida por la piedra queda expresada por la fórmula siguiente:

$$h = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

donde $g = 9.8$ m/seg^2* y t es el tiempo transcurrido entre soltar la piedra y chocar ésta con el agua, y que es aproximadamente igual al tiempo medido en nuestra observación. Esta fórmula se conoce como «ley de la caída libre de los cuerpos» (Galileo).

3. En nuestro curso de física, al tratar el tema de la electricidad, se dice que Charles A. de Coulomb (1736-1806) descubrió cómo dos cargas eléctricas se atraen o repelen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa (Fig. 2.2). Mediante símbolos, este hecho se representa en la forma

$$F \propto \frac{1}{r^2} \qquad [2.1]$$

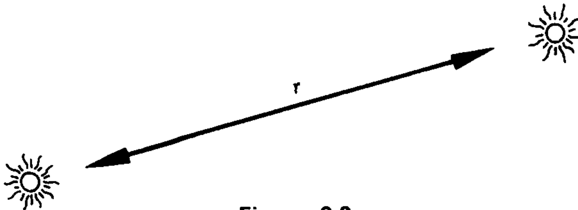


Figura 2.2

Es más, la fuerza resulta ser directamente proporcional al producto de sus cargas, con lo cual [2.1] se transforma en

$$F \propto \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2};$$

y, si se usa una constante de proporcionalidad, por último se tendrá que

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

* Valor aproximado.

donde $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ y $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ coulombs^2/newton $\times$ m^2, en el sistema MKS.

4. *Masa relativista.* Desígnese la masa de un objeto que se encuentra en reposo con m_0. La física muestra que, al moverse el objeto con una rapidez u, su masa *varía* de acuerdo con la fórmula siguiente:

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad [2.2]$$

donde c es la rapidez de la luz.

La rapidez de desplazamiento de los objetos macroscópicos (incluyéndonos a nosotros mismos) es pequeña en comparación con la rapidez de la luz, por lo que m_u es prácticamente igual a m_0. En efecto, la mecánica clásica (o de Newton) así lo considera.

Sin embargo, obsérvese que cuando u tiende a c, el denominador de la ecuación [2.2] tiende a ser igual a cero, y si recordamos que una constante dividida entre una cantidad que tiende a cero tiende a infinito, se tiene que ¡m_u tiende a infinito!

5. *Principio de Arquímedes* (EUREKA). En la biografía de Arquímedes (Cap. 1) vimos que éste hizo un importante descubrimiento que establece: un cuerpo sumergido en un líquido es empujado hacia arriba con una fuerza F igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo. Lo anterior se representa como

$$F = P \cdot V,$$

donde P es el peso por unidad de volumen del líquido y V es la cantidad de líquido desplazado.

En los ejemplos anteriores se observa que las fórmulas relacionan números reales que representan las medidas (se escogen de antemano las unidades respectivas en cada caso) de las magnitudes consideradas; por ejemplo, distancia, tiempo, fuerza, presión, etc. Más aún, al conocer o dar valores en una fórmula a alguna de esas medidas se determina, en cada caso, el valor de la otra medida relacionada.

Además, se nota que las fórmulas se han escrito de manera que, al sustituir valores en las magnitudes que aparecen en el miembro derecho de la igualdad, se determina en forma única la magnitud correspondiente mostrada en el miembro izquierdo de la igualdad. Así, a cada número, pareja de números, terna de números, etc., se ha asociado, mediante estas fórmulas, un único número.

En este texto se manejarán por lo general relaciones que a cada número asocian un único número. Se llamará funciones a dichas relaciones; muchas de éstas se expresan mediante fórmulas.

A continuación veremos algunos ejemplos de funciones.

1. Considérese una pirámide cuadrangular recta, cuya base tiene lado igual a x y cuya altura es h. Entonces, la fórmula para el volumen V está dada por

$$V = \tfrac{1}{3}x^2h \qquad [2.3]$$

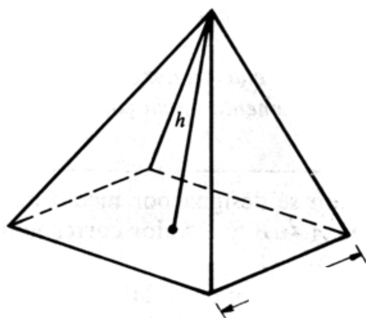


Figura 2.3

Así, entonces, para cada pareja de valores (x, h) se tiene un único número que representa el valor del volumen de la pirámide correspondiente.

Si se asigna a h, por ejemplo, el valor 5, la fórmula [2.3], en ese caso, se transforma en

$$V = \frac{1}{3}x^2 \cdot 5,$$

que determina un valor único de V para cada valor de x. Esta relación es del tipo que se manejará en el texto.

2. *Función cumpleaños.* El niño Jorge festeja su sexto aniversario el 4 de julio de 1971 y sus padres dirán durante todo un año que el niño tiene seis años de edad. No será sino hasta el 4 de julio de 1972 cuando dirán que tiene siete años cumplidos, y así sucesivamente.

Aquí se observa que a cada instante del año posterior al 4 de julio de 1971 y hasta el 3 de julio de 1972 se asigna el número 6; o sea, a cada real del intervalo $[6, 7)$ se asocia el número 6; a cada real del intervalo $[7, 8)$, el número 7, y así sucesivamente.

3. Observamos que un cuerpo se desplaza en línea recta con rapidez constante v_0 durante cierto periodo; digamos, desde el instante 0 hasta los 10 s posteriores; en tal caso, su movimiento se describe por la fórmula $x = v_0 t$, y la variación de t se indica como sigue: $0 \leqslant t \leqslant 10$.

A partir de los 10 s, advertimos que el cuerpo se acelera con una aceleración constante a y que la distancia recorrida está dada por

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}a(t - 10)^2, \qquad \text{para } t \geqslant 10$$

Lo anterior puede reducirse a una sola expresión; así:

$$x = \begin{cases} v_0 t & 0 \leqslant t \leqslant 10, \\ v_0 t + \tfrac{1}{2}a(t - 10)^2 & t \geqslant 10 \end{cases}$$

4. Considérese la relación siguiente: cada número real positivo x se relaciona con y, si se cumple que $y^2 = x$. Para $x \neq 0$ no se obtiene un único y; 4 se relaciona con 2 y -2 por medio de esta relación. De hecho, esta relación *no* es una función.

A continuación se define el concepto de *función.*

DEFINICION 2.1 *Una relación donde a cada elemento de un conjunto A le corresponde un único elemento de un conjunto B, se denomina una función de A en B.*

Notación. La función se designa por medio de una letra f, g, h, ... y se denota por $f:A \to B$, o bien $A \xrightarrow{f} B$, y el valor correspondiente a $x \in A$ se denota por $f(x)$.

El conjunto A se llama «dominio de la función» y se denota por $\operatorname{dom} f$ (si se denomina f a la función). El conjunto B se conoce como codominio de la función. Y la regla de correspondencia o asociación, es el criterio que permite asociar a cada elemento de A un único elemento de B; esta regla puede estar dada, por ejemplo, por medio de una fórmula.

Cuando una función esté dada por una fórmula, se tiene que $f(x)$ es igual a una expresión analítica en x. En este caso, se llamará *dominio natural* de la función al conjunto de todos los puntos para los cuales la expresión analítica toma un valor definido único.

Se dice que dos funciones son iguales si son iguales su regla de correspondencia, su dominio y su codominio, respectivamente.

En este libro se considerarán sólo funciones cuyo dominio y codominio sean subconjuntos de $\mathbb{R}$. Estas funciones serán llamadas reales de variable real.

EJEMPLOS

1. El dominio natural de la función $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3)$ es el conjunto de los números reales.
2. El dominio natural de la función $g(x) = x + 1/x^2$ es el conjunto de los números reales excepto el cero. ¿Por qué?
3. Considérese la función $h(x) = (x - 3)/(x^2 - 9)$; el dominio natural de esta función son los reales, excepto el 3 y -3.

GRAFICA DE UNA FUNCION

Con objeto de analizar el comportamiento de algunas funciones, consideramos su gráfica, para lo cual será necesario coordenar el plano, y se recurrirá al concepto de pareja ordenada de números reales. Se dice que una pareja de números reales a, b es *ordenada* cuando se establece cuál de los dos números es el primer elemento y cuál el segundo; en este caso, se escribe (a, b). Así, dos parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.

Considérense dos rectas x e y en el plano que sean ortogonales entre sí.

Oriéntense como se indica en la figura 2.4 e identifíquense los puntos de cada una de ellas con los números reales, usando la misma unidad en las dos y escogiendo como origen en ambas a su punto de intersección O. En el texto

se usará la orientación mencionada y O será llamado el *origen* del *sistema de coordenadas.*

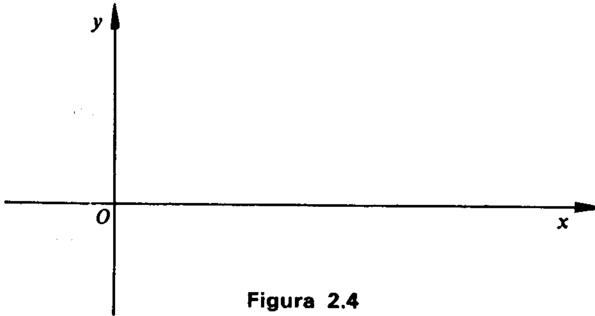


Figura 2.4

Las rectas que aparecen en la figura 2.4 reciben el nombre de *ejes coordenados.* Se denomina a x *eje de las abscisas* y a y *eje de las ordenadas.*

Dado un punto P del plano, trácense por él rectas perpendiculares a cada eje coordenado (Fig. 2.5).

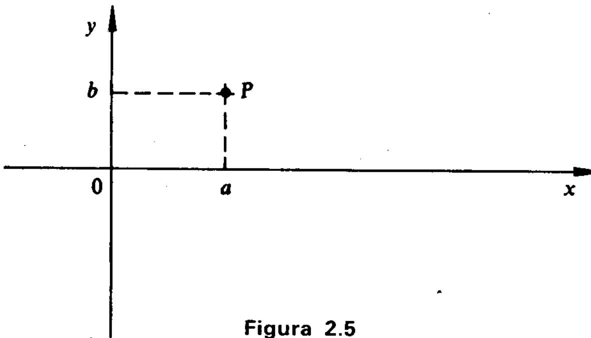


Figura 2.5

Una de estas rectas intersecta a x en a y la otra intersecta a y en b; se dice entonces que a es la abscisa del punto P, y b la ordenada del punto P, y a este punto P se hace corresponder la pareja ordenada (a, b). (Obsérvese que se usa la misma notación para las parejas ordenadas que para el intervalo abierto, pero la situación resulta evidente dentro del propio contexto y no debe prestarse a confusiones.)

En forma recíproca, a cada pareja ordenada (a, b) se hace corresponder un punto P del plano de la manera siguiente: dada la pareja (a, b), se marca sobre el eje x el punto correspondiente a a, y sobre el eje y el correspondiente a b; se traza en b una perpendicular a y; se traza en a una perpendicular a x; la intersección de estas dos rectas determina el punto P que corresponde a la pareja ordenada (a, b).

Ejercicios

1. Localícense los puntos siguientes en el plano:

   a) $(7, -3)$ b) $(-1, -1)$ c) $(0, 0)$ d) $(8, \frac{3}{4})$

2. Dígase cuáles son las abscisas y las ordenadas de los puntos siguientes del plano:
   a) $(0, 1)$ b) (y, x) c) $(-0.3, 3)$ d) $(\frac{3}{4}, 8)$

Considérese el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales $(x, f(x))$ en donde x es cualquier número localizado en el dominio de la función y $f(x)$ el valor de la función en el punto x. Este conjunto define lo que llamamos *gráfica de la función f*, o sea, gráfica de $f = \{(x, f(x) \mid x \in \text{dom}\, f\}$.

Como ejemplo, tómese la función $f(x) = x^2$. En este caso, la gráfica contiene *todas* las parejas ordenadas (x, x^2), donde x pertenece a los números reales; así, entre una infinidad de parejas ordenadas, las mencionadas a continuación pertenecen a la gráfica de la función $f(x) = x^2$, y son, a saber, $(-2, +4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(\sqrt{2}, 2)$, (π, π^2), $(0.1, 0.01)$.

Preguntemos si $(-3, 5)$ pertenece a la gráfica de la función estudiada: la respuesta es *no*. ¿Por qué?

Por lo ya visto, es posible identificar cada elemento de esta gráfica con puntos en el plano y obtener así la figura 2.6. Esa colección de puntos del plano también se conoce como gráfica de la función f. En general, esto puede hacerse para todas las funciones cuyo dominio y codominio son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Una forma de obtener una aproximación a la gráfica de la función es por el método de tabulación, que consiste en localizar cierto número de puntos de la gráfica y, posteriormente, unirlos.

El modo de unirlos viene dado por ciertas propiedades de la función, que se conocerán mediante los conceptos que se estudiarán más adelante (continuidad, máximos y mínimos, puntos de inflexión, etc.), indicándonos si la gráfica de la función se rompe, se dobla, cómo se dobla, si tiene picos, etc.

Conocer la función implica que podemos construir su gráfica, pero conocer algunos puntos de la gráfica, ¡no implica conocer la función!

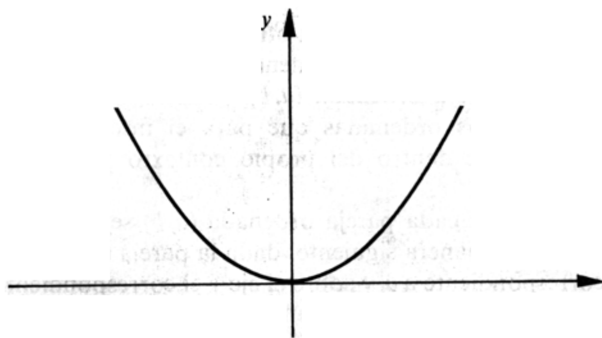


Figura 2.6

A continuación, se ilustra el método de tabulación para obtener la gráfica de la función mencionada anteriormente $f(x) = x^2$ (véase Fig. 2.7).

TABLA 2.1

x	$f(x)$
−4	16
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

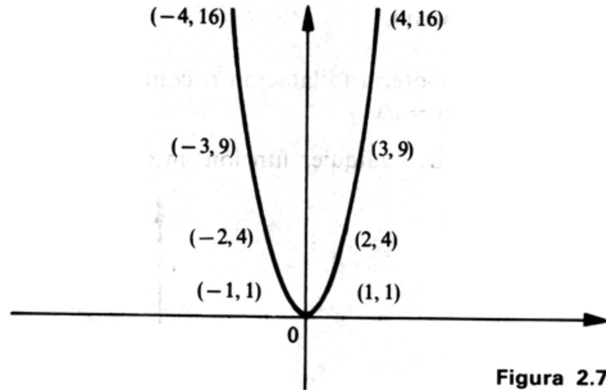


Figura 2.7

En el codominio de una función podemos distinguir un subconjunto que recibe el nombre de *imagen* de la función y cuyos elementos son todos los valores de la función. Al denotar por im f a la imagen de la función f, se tiene que

$$\text{im}\, f = \{y \mid y = f(x),\ x \text{ en el dominio de } f\}.$$

A menudo interesará más la imagen de la función que su codominio. En el caso en que im f coincida con el codominio de f, se dice que f es suprayectiva.

FUNCIONES LINEALES

Una función lineal es cualquier función cuya regla de correspondencia está dada por una fórmula del tipo

$$f(x) = ax + b,$$

donde a y b son constantes; el dominio natural de toda función lineal son los números reales.

EJEMPLOS

1. $f(x) = 2x + 1$ 2. $f(x) = x + 10$ 3. $f(x) = x$
4. $f(x) = x + 3$ 5. $f(x) = x/4$

Entre las funciones lineales pueden distinguirse los casos particulares siguientes:

Constante.
$f(x) = b$
2. Identidad.
$I(x) = x$
3. Traslación.
$f(x) = x + b$

4. Simetría.
   $f(x) = -x$
5. Homotecia (dilatación o contracción).
   $f(x) = ax$

La gráfica de cualquier función lineal es una recta (Fig. 2.8).

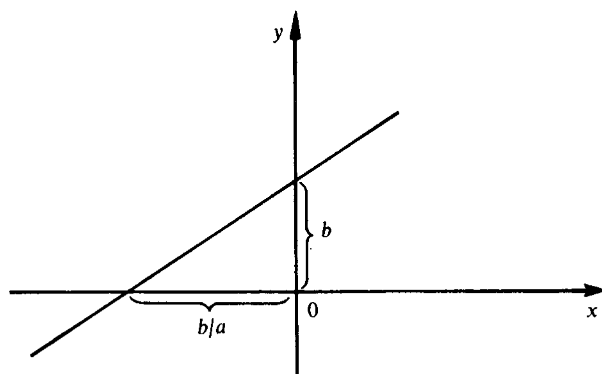
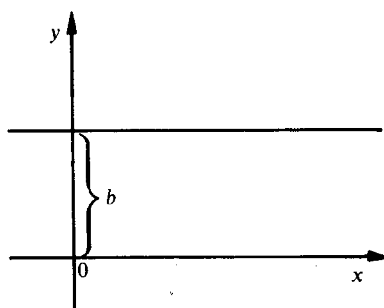
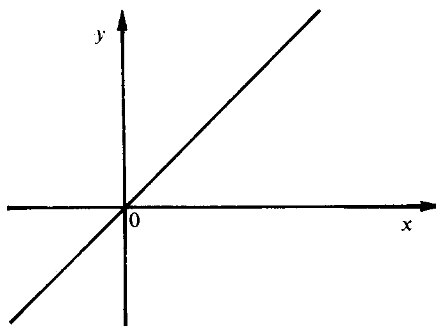


Fig. 2.8 Gráfica de la función $f(x) = ax + b$ (con $a \neq 0$).

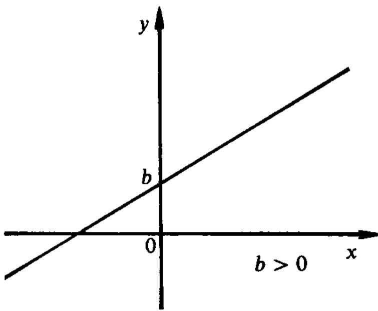
Para los casos particulares se tiene en especial:
Constante: $f(x) = b$.

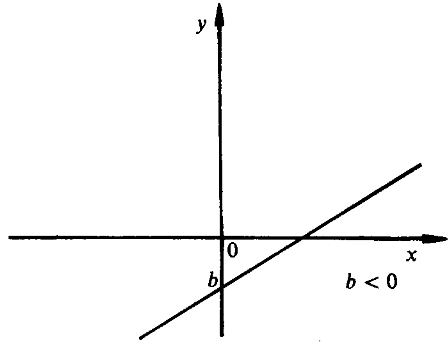


Identidad: $I(x) = x$.

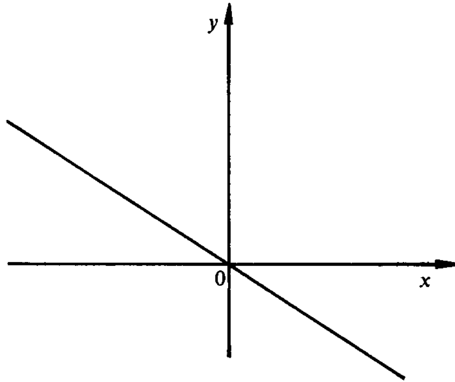


Traslación: $f(x) = x + b$.





Simetría: $f(x) = -x$.



Homotecia: $f(x) = ax$.

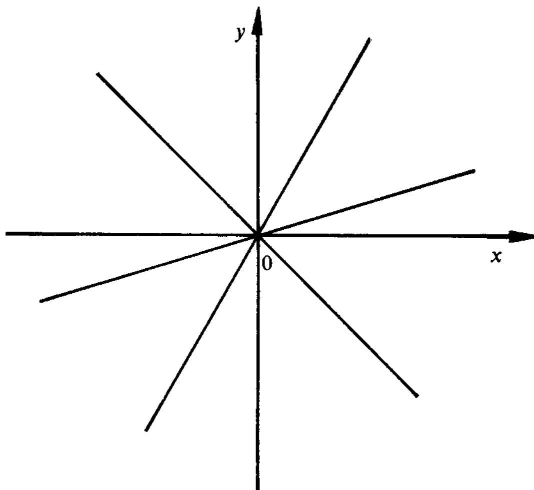


Fig. 2.9 La familia de rectas corresponde a distintos valores de *a*.

Función polinomial. Se designará con el nombre de función polinomial a cualquier función cuya regla de asociación esté dada por una fórmula del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

en donde n es un número natural o cero y los coeficientes a_i son números reales. Estas funciones tienen por dominio natural a los números reales.

Se dice que el *grado* de la función polinomial es n, si $a_n \neq 0$, y además $a_k = 0$ para todo $k \geqslant n$; cuando $n = 0$, la función polinomial es una función constante. Si $f(x) = 0$ para todo x, se conviene en asignar el grado $-\infty$ a la función polinomial, aunque otros autores no se lo asignan.

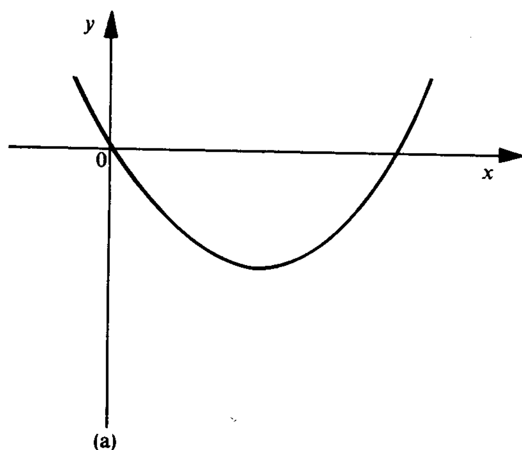
Si el grado de la función polinomial es 1, se obtiene una función *lineal;* a saber,

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

Si la función polinomial es de grado 2, recibe entonces el nombre de función *cuadrática*, y es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Si $a > 0$, $b < 0$ y $c = 0$, su gráfica es similar a la de la figura 2.10(a).
En la figura 2.10(b) se tiene el caso en que $a < 0$, $b = 0$ y $c = 0$.



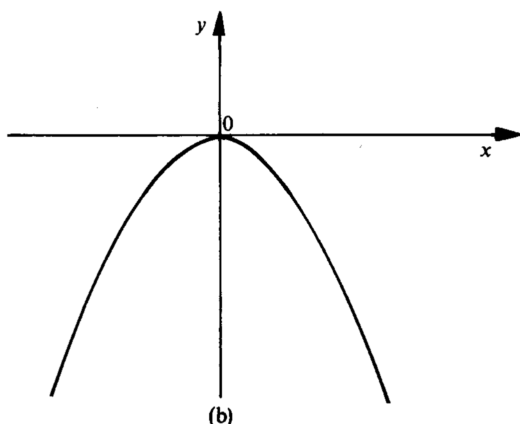


Figura 2.10

Si es de grado 3 ó 4, la función polinomial se conoce como cúbica o cuártica, respectivamente.

Función racional. Es una función g cuya regla de correspondencia se expresa como el cociente de dos polinomios, a saber,

$$g(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0};$$

g está definida para todos los valores de x en los que no se *anula el denominador.*

Función valor absoluto. Esta función se define como $f(x) = |x|$; el significado de $|x|$ se estudió en el capítulo anterior. La gráfica de esta función aparece en la figura 2.11.

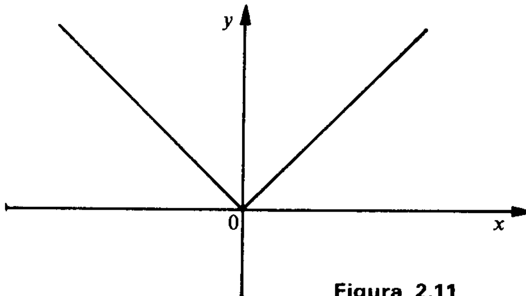


Figura 2.11

Función mayor entero, menor o igual que $[x]$. Esta función se define como el mayor entero que es menor o igual que x; por ejemplo, $[3.14] = 3$; $[2.14] = 2$; $[0.1] = 0$; $[-2.1] = -3$; $[-1.9] = -2$; su gráfica aparece en la figura 2.12. Nótese que coincide con la función que llamamos, en los ejemplos, la función cumpleaños.

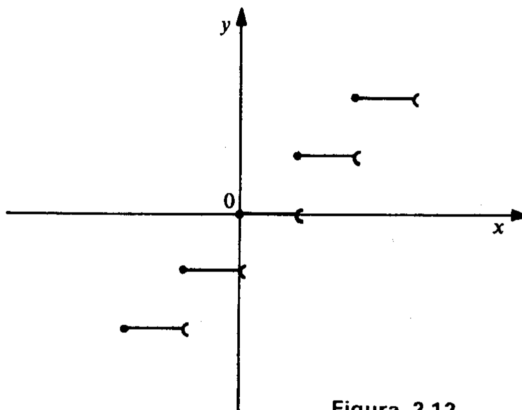


Figura 2.12

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Las funciones trigonométricas son de suma importancia y han sido utilizadas desde tiempos remotos en problemas donde intervienen métodos de triangulación como los de astronomía, navegación (sextante, astrolabio, etc.) y mediciones indirectas, tales como alturas de pirámides, anchuras de ríos, etc. Se conocen tablas de senos que datan del siglo II a.C.

Para definir estas funciones, considérese en el plano coordenado el círculo unitario, es decir, aquel cuyo centro es el origen O del sistema y cuyo radio es igual a uno, y defínase una función de la recta sobre el círculo de la manera siguiente:

Enróllese la semirrecta positiva en el círculo unitario comenzando en el punto $P_0 = (1, 0)$, en el sentido positivo, o sea, el contrario al movimiento de las manecillas del reloj; es decir, dado $\theta \geqslant 0$, le hacemos corresponder el punto P_θ del círculo, tal que el arco P_0P_θ recorrido en sentido positivo es de longitud θ. En forma análoga, la semirrecta negativa se enrolla en el sentido negativo, o sea, aquel en que las manecillas del reloj avanzan a partir del punto P_0; es decir, dado $\theta < 0$, le hacemos corresponder el punto P_θ del círculo, tal que el arco P_0P_θ, recorrido en sentido negativo, es de longitud $|\theta|$. (Fig. 2.13.)

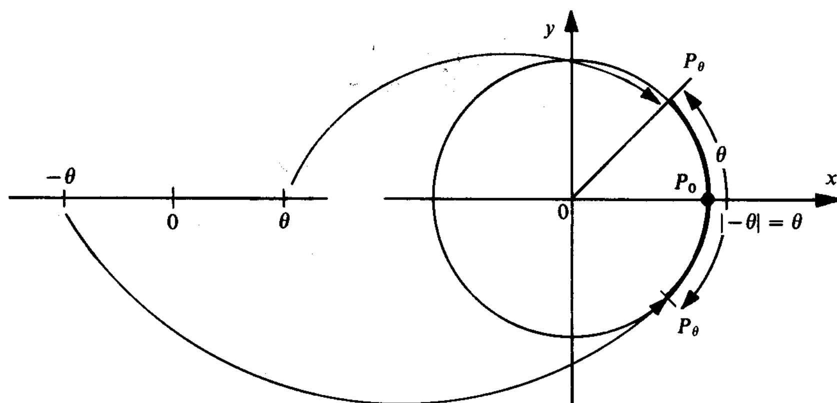


Figura 2.13

En ambos casos, se conoce a θ como una medida radián del ángulo P_0OP_θ.

En la tabla 2.2 se indica la correspondencia entre algunos puntos de la recta y puntos del círculo unitario.

Se sabe que la longitud del círculo unitario es igual a 2π; por tanto, cada uno de los intervalos $[0, 2\pi]$ y $[2\pi, 4\pi]$, por ejemplo, cubre el círculo unitario (en la Tabla 2.2 se observa que los puntos 0 y 2π van a dar al mismo punto P_0 del círculo). Por la misma razón tenemos, además, que los números reales θ y $\theta \pm 2\pi$ están asignados al mismo punto del círculo. En general se tiene

$$P_\theta = P_{(\theta \pm 2n\pi)}, \qquad [2.4]$$

donde n es un número natural arbitrario o cero.

TABLA 2.2

θ	P_θ
$\pi/2$	(0, 1)
π	(−1, 0)
$3/2\pi$	(0, −1)
2π	(1, 0)
$-\pi/2$	(0, −1)
$-3/2\pi$	(0, 1)
$-7/4\pi$	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
0	(1, 0)

A continuación, se define una función cuyo dominio natural es el conjunto de los números reales y que asocia a cada θ la ordenada del punto P_θ. Obsérvese que la ordenada del punto P_θ, en la figura 2.13, es igual al seno del ángulo P_0OP_θ.

Esta función se llama función seno, y se denota por *sen*; por tanto, sen: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sen θ = ordenada de P_θ.

Del mismo modo, ya que la abscisa de P_θ es igual al coseno del ángulo P_0OP_θ, la función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, y que asocia a cada θ la abscisa de P_θ, se denomina función coseno, denotándola por *cos;* es decir, cos: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y cos θ = abscisa de P_θ. Como P_θ es un punto del círculo unitario, es claro que

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

para todo θ.

De acuerdo con la tabla 2.2, se tienen los valores siguientes para las funciones seno y coseno:

TABLA 2.3

θ	sen θ	cos θ
$\pi/2$	1	0
π	0	−1
$3/2\pi$	−1	0
2π	0	1
$-\pi/2$	−1	0
$-3/2\pi$	1	0
$-7/4\pi$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

De la ecuación [2.4] vemos que

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\theta \pm 2n\pi)$$

y [2.5]

$$\cos \theta = \cos(\theta \pm 2n\pi),$$

donde n es un número natural arbitrario o cero.

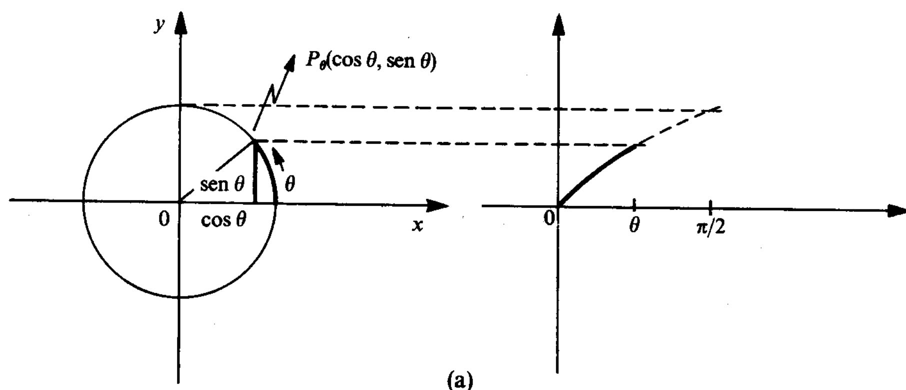
Se dice que una función f es periódica si existe $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$, para todo $x \in \text{dom } f$, y que T_0 es su periodo si T_0 es el mínimo número positivo que satisface la condición anterior.

Se nota que tanto sen como cos tienen como periodo a 2π.

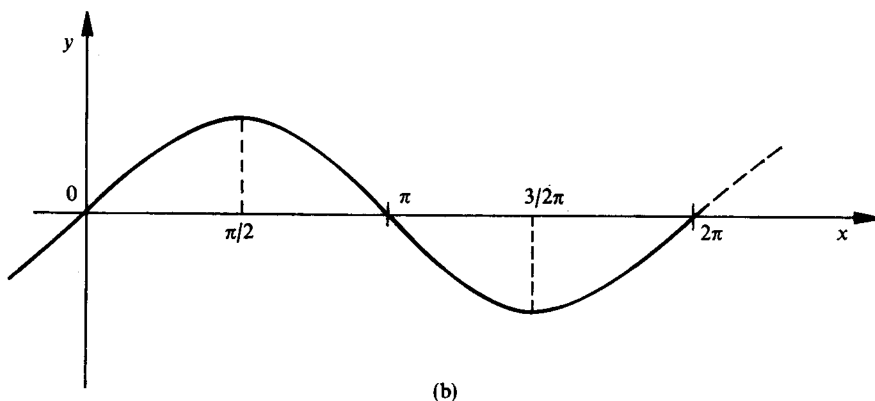
Gráficas de las funciones seno y coseno

Por la definición de la función seno, cada punto $(\theta, \text{sen } \theta)$ de la gráfica de esta función tiene la misma segunda coordenada que el punto P_θ. Por tanto, para la gráfica de la función seno puede utilizarse la figura 2.14(a).

Cuando θ toma valores entre 0 y $\pi/2$, la ordenada del punto P_θ varía desde 0 hasta 1. Entre $\pi/2$ y π, la ordenada decrece desde 1 hasta 0. De π a $3/2\pi$, la ordenada se hace negativa y varía entre 0 y -1. Por último, de $3\pi/2$ a 2π, la ordenada de P_θ, es decir, el seno de θ, crece desde -1 hasta 0. Como ya se observó, la función seno se repite en intervalos de longitud igual a 2π. Así, la gráfica de la función seno es la indicada en la figura 2.14(b).



(a)



(b)

Figura 2.14

A partir de la fórmula

$$\cos\theta = \operatorname{sen}(\theta + \pi/2),$$

la cual se probará más adelante [Ec. (2.12)], se sigue que la gráfica de la función coseno es

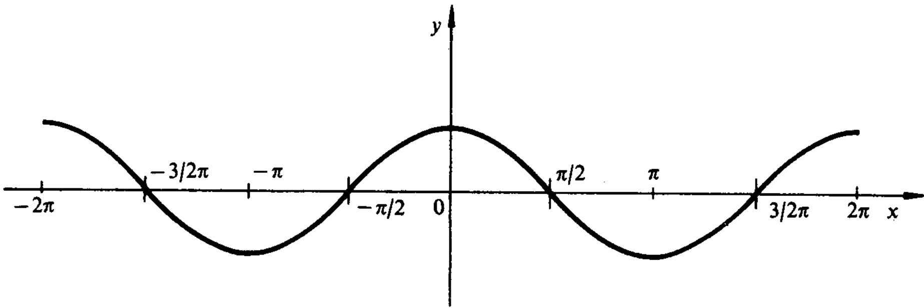


Figura 2.15

Otras funciones trigonométricas

Existen otras funciones trigonométricas, definidas en términos de seno y coseno.

Dado un real θ, se definen las funciones: tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc) por medio de las fórmulas siguientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

El periodo de tan y cot es π, y el de sec y csc es 2π. A continuación, aparecen los dominios naturales de cada una de estas funciones:

	dominio natural
tan, sec	$\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \neq (2n + 1)\pi/2,\ n \text{ entero}\}$
cot, csc	$\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \neq n\pi,\ n \text{ entero}\}$

Obsérvese que en los casos de la tangente y la secante se han excluido, para el dominio natural, los valores para los que el coseno se anula y, de la misma manera, con la cotangente y la cosecante, los valores donde el seno se anula.

Gráfica de la función tangente

En virtud de que $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ (véase Ejercicio 2.16), basta determinar la porción de la gráfica correspondiente al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

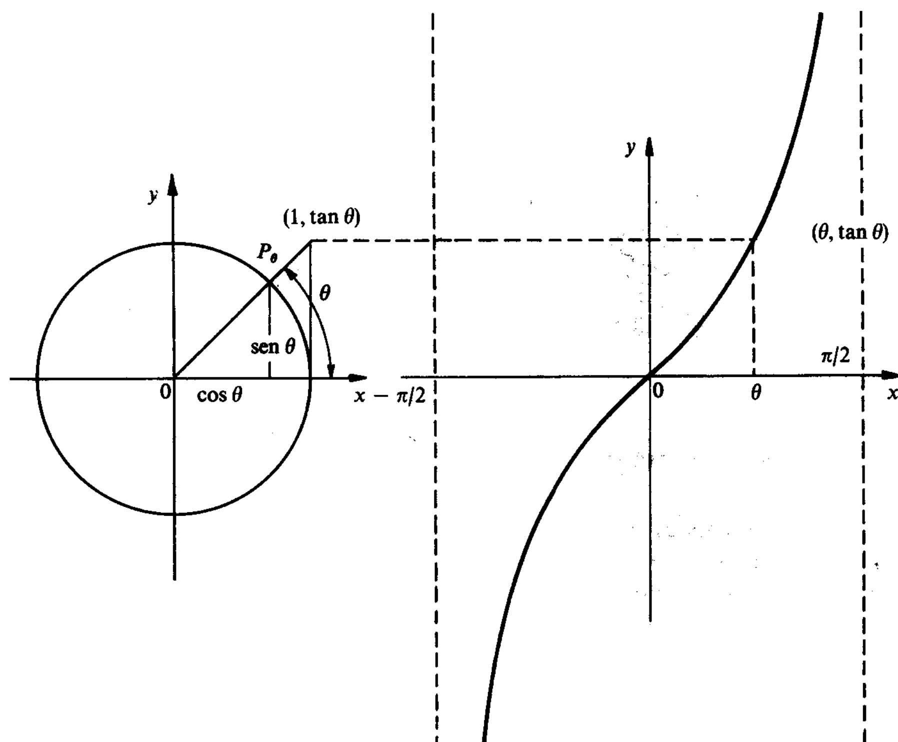
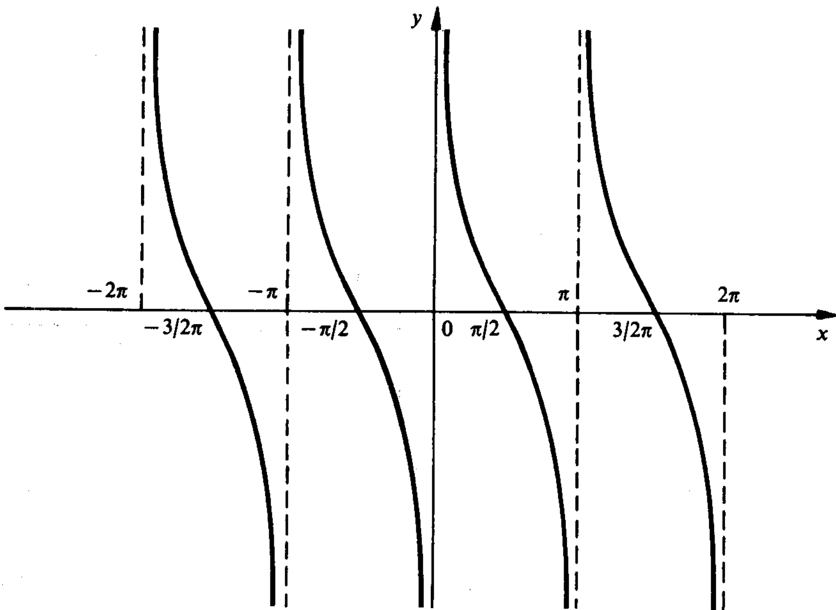


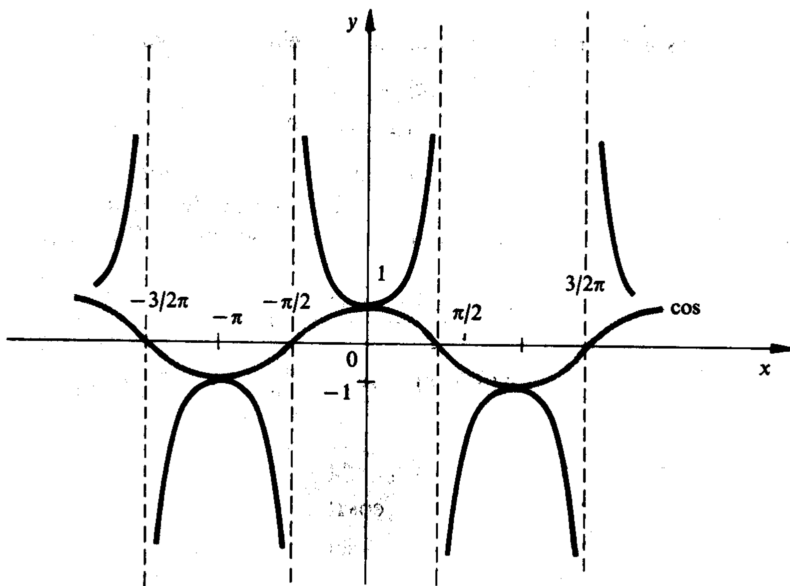
Figura 2.16

Gráficas de las funciones cotangente, secante y cosecante

Las gráficas de estas funciones se obtienen en las correspondientes a la tangente, el coseno y el seno. En el capítulo 1 vimos que el inverso de un número real se encuentra más próximo o más lejano del cero (en el sentido positivo o negativo) según x esté más lejano o más próximo a cero (en el sentido positivo o negativo), respectivamente; por tanto, debe ser intuitivamente claro que las gráficas de estas funciones son las de la figura 2.17.

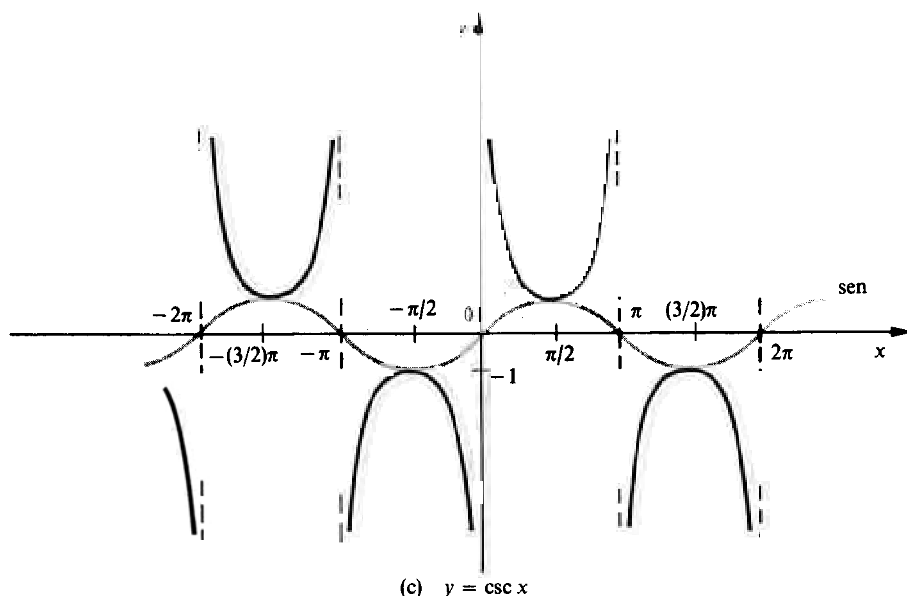


(a) $y = \cot x$



(b) $y = \sec x$

Figura 2.17



(c) $y = \csc x$

Figura 2.17 (*continuación.*)

Relaciones trigonométricas

A lo largo de esta obra, serán de utilidad las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta + \pi) &= -\operatorname{sen}\theta \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos\theta \end{aligned} \qquad [2.6]$$

Demostración Dado un número real θ, se tiene que P_θ y $P_{\theta+\pi}$ son simétricos respecto al origen (recuérdese que la longitud de la circunferencia del círculo unitario es 2π), o sea, O es el punto medio del segmento $P_\theta P_{\theta+\pi}$ (Fig. 2.18), de donde

$$\frac{\cos(\theta + \pi) + \cos\theta}{2} = 0,$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta + \pi) + \operatorname{sen}\theta}{2} = 0$$

Por tanto, se tienen las relaciones [2.6].

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos(\theta), \\ \operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \qquad [2.7]$$

Demostración Es evidente que los puntos P_θ y $P_{-\theta}$ son simétricos respecto al eje x. Por consiguiente, se tiene la ecuación [2.7], pues las primeras coordenadas de P_θ y $P_{-\theta}$ son iguales y las segundas son simétricas (Fig. 2.19).

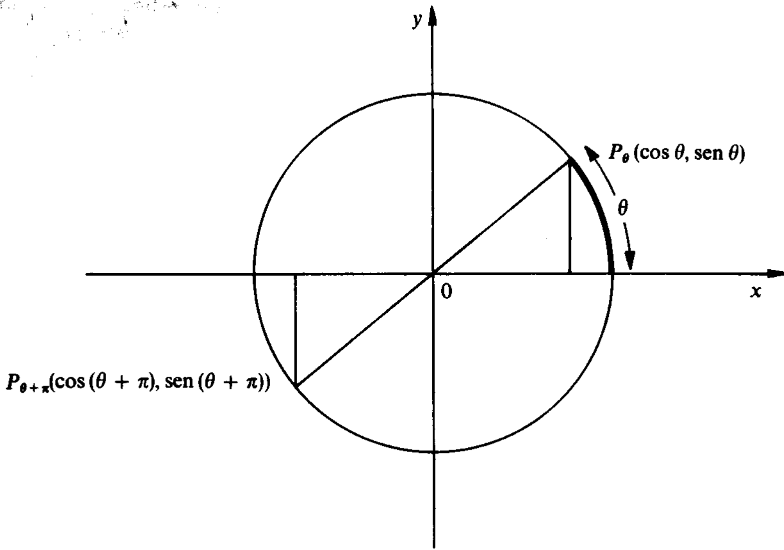


Figura 2.18

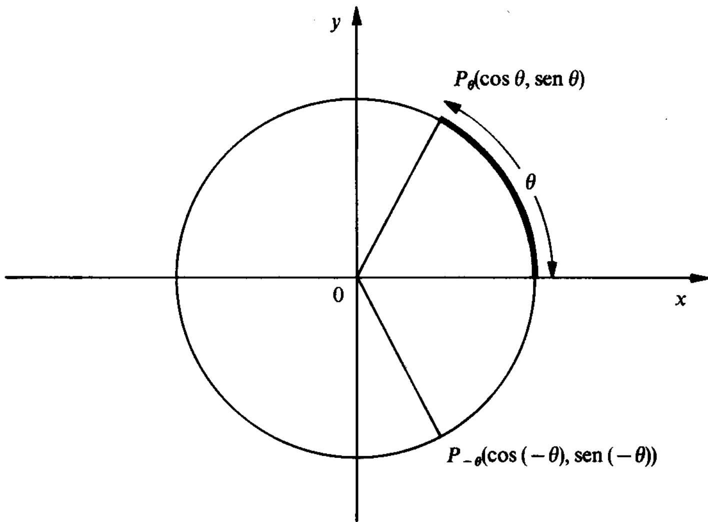


Figura 2.19

Fórmulas para $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ ***y*** $\cos(\theta_1 - \theta_2)$

Sean θ_1 y θ_2 dos números reales. (Véase Fig. 2.20.)

$$\begin{aligned}(P_0P_{\theta_1+\theta_2})^2 &= (\cos(\theta_1 + \theta_2) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(\theta_1 + \theta_2)\\ &= 2 - 2\cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

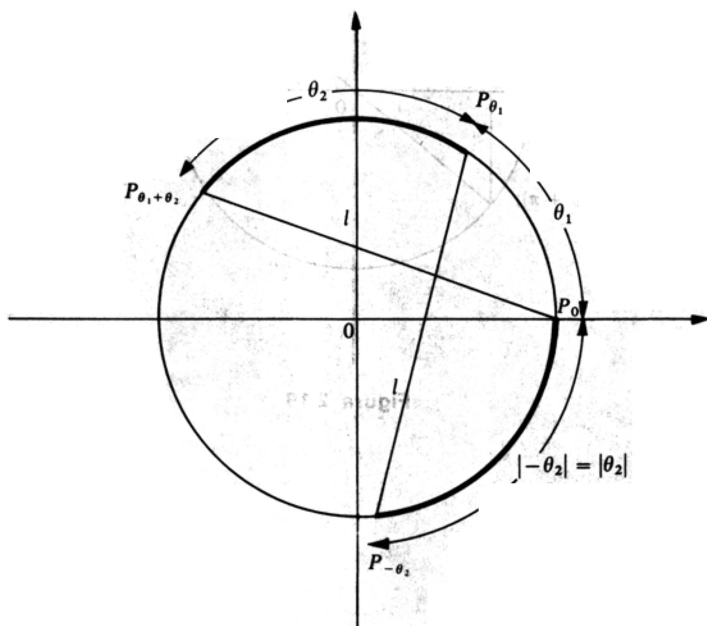


Figura 2.20

Por otro lado, este último resultado no se altera si hacemos una rotación de $-\theta_2$ radianes.

Es decir,

$$(P_0P_{\theta_1+\theta_2})^2 = P_{-\theta_2}P_{\theta_1}{}^2 \qquad [2.8]$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}(P_{-\theta_2}P_{\theta_1})^2 &= (\cos\theta_1 - \cos(-\theta_2))^2 + (\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}(-\theta_2))^2\\ &= \cos^2\theta_1 - 2\cos\theta_1\cos(-\theta_2) + \cos^2(-\theta_2) + \operatorname{sen}^2\theta_1 - 2\operatorname{sen}\theta_1\\ &\quad \operatorname{sen}(-\theta_2) + \operatorname{sen}^2(-\theta_2)\\ &= 2 - 2(\cos\theta_1\cos(-\theta_2) + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}(-\theta_2))\\ &= 2 - 2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2).\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de las relaciones [2.7].

Si se sustituyen en la ecuación [2.8] los valores correspondientes, resulta

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \qquad [2.9]$$

Al aplicar las ecuaciones [2.7] y [2.9], se obtiene

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad [2.10]$$

En particular,

$$\cos(\theta + \pi/2) = -\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen}\theta \qquad [2.11]$$

De estas relaciones se siguen

$$\operatorname{sen}(\theta - \pi/2) = -\cos(\theta) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\theta + \pi/2) = \cos\theta \qquad [2.12]$$

Fórmulas para sen $(\theta_1 + \theta_2)$ y sen $(\theta_1 - \theta_2)$

De la segunda relación que aparece en [2.11], concluimos

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2 - \pi/2)$$

Al aplicar [2.9] a θ_1 y $\theta_2 - \pi/2$ y emplear de nuevo [2.12] y [2.11], se tiene

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 \qquad [2.13]$$

Por último, de manera semejante a como se obtuvo [2.10], se tiene

$$\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 \qquad [2.14]$$

Relaciones para las otras funciones trigonométricas

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad [2.15]$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \qquad [2.16]$$

La primera fórmula se sigue al dividir entre $\cos^2\theta$ cada miembro de la igualdad

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

En forma semejante se obtiene [2.16].

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{-\tan\theta_1 \tan\theta_2} \qquad [2.17]$$

Demostración

$$+ \theta_2) = \frac{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)}$$

Así,

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2}{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2}$$

Al dividir numerador y denominador entre $\cos\theta_1 \cos\theta_2$, se sigue la ecuación [2.17].

Suma, resta, multiplicación y división de funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real. Se definen las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g mediante

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

El dominio natural de las tres primeras funciones es la intersección de los dominios de f y g, pues sólo para los puntos de esta intersección tenemos definidos los valores de $f(x)$ y $g(x)$.

El dominio natural de f/g es el subconjunto de la intersección de los dominios de f y g formado por los puntos x para los cuales $g(x) \neq 0$, pues la división entre cero no tiene sentido.

Dado que estas operaciones se definen en términos de las correspondientes para los números reales, las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva son válidas para las operaciones de suma y producto de funciones.

EJEMPLOS

1. Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2 \operatorname{sen} x - 1$. Se tiene que

$$(f + g)(x) = x^2 + 2 \operatorname{sen} x - 2$$

2. Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2 \operatorname{sen} x - 1$. Se tiene que

$$(fg)(x) = 2x^2 \operatorname{sen} x - x^2 - 2 \operatorname{sen} x + 1$$

En estos dos ejemplos resulta que $\operatorname{dom}(f + g) = \operatorname{dom}(fg) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

3. Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2 \operatorname{sen} x - 1$. Entonces,

$$(f/g)(x) = \frac{x^2 - 1}{2 \operatorname{sen} x - 1}$$

Aquí $\operatorname{dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{\pi/6 + 2n\pi, \text{ con } n \text{ entero}\}$.

4. Sean $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x + 2$. Entonces,

$$(f/g)(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 2}$$

En este ejemplo, $\operatorname{dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Obsérvese que $(x^2 - 4)/(x + 2) = x - 2$ para $x \neq -2$.

Sin embargo, $(f/g)(x) = (x^2 - 4)/(x + 2)$ no es la misma función que $h(x) = x - 2$, ya que sus dominios de definición son distintos.

LA INVERSA DE UNA FUNCION

Se dice que una función es *creciente* (estrictamente creciente) si $x > y$ implica que $f(x) \geqslant f(y)$ ($f(x) > f(y)$). La función decreciente se define análogamente.

Como ejemplos de funciones crecientes tenemos a x, y x^3 y sus gráficas aparecen en la figura 2.21.

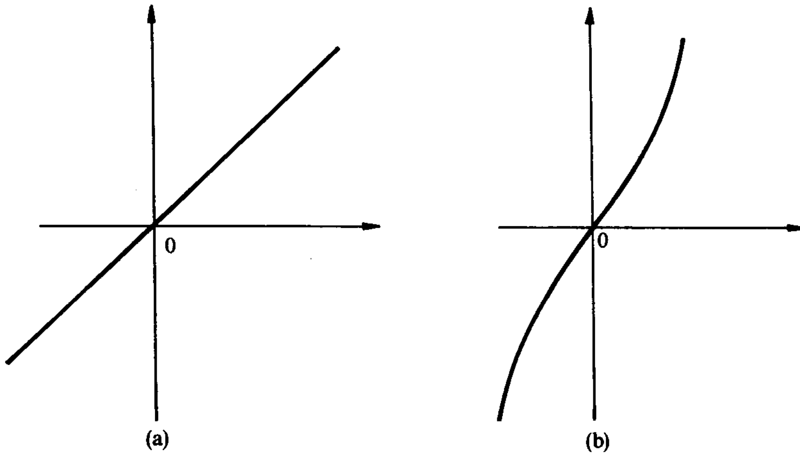


Figura 2.21

Nótese que cualquier función estrictamente creciente (estrictamente decreciente) tiene la propiedad siguiente:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Las funciones que satisfacen esta propiedad se denominan funciones *inyectivas*.

De acuerdo con lo anticipado, de aquí en adelante nos referiremos a la imagen de la función y no al codominio de la misma.

Sea $f: A \to \operatorname{im} f$. Si f es inyectiva, entonces para cada $y \in \operatorname{im} f$, existe un único $x \in A$, tal que $f(x) = y$; es decir, en este caso se tiene un criterio que permite asignar, de manera única, a cada elemento en $\operatorname{im} f$, un elemento del dominio de la función f. En otras palabras, podemos definir una función $g: \operatorname{im} f \to A$ como $g(y) = x$ si $f(x) = y$. Esta se llama función inversa de f y se denota por f^{-1}.

Observe que si f no es inyectiva, la regla de asociación propuesta podría asociar a cada elemento de $\operatorname{im} f$ dos o más elementos de A, por lo que no se tendrá establecida una función. Por ejemplo, sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ con $f(x) = x^2$; en tal caso, el número 4 es la imagen de 2 y -2. Así, el criterio propuesto no asigna un número único al 4.

Ejemplos de funciones inversas

1. Sea $f(x) = x$. Aquí $f^{-1}(y) = y$.
2. Sea $f(x) = ax + b$, donde $a \neq 0$. En este caso, $f^{-1}(y) = y/a - b/a$.
3. Sea $f(x) = (2x + 1)/(x + 3)$, donde $x \neq -3$.
   En este caso, $f^{-1}(y) = (1 - 3y)/(y - 2)$ e $\operatorname{im} f = \mathbb{R} - \{2\}$.

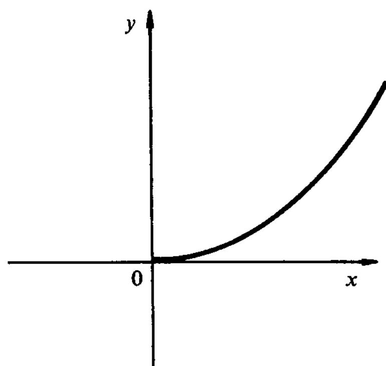
En los ejemplos anteriores se consideró, aunque no en forma explícita, $y = f(x)$ y se despejó x en términos de y; así se obtuvo la expresión para $f^{-1}(y) = x$.

Si se procede así con la función $y = x^2$, entonces $x = \pm\sqrt{y}$ (esta relación *no* determina una función en $\operatorname{im} f$).

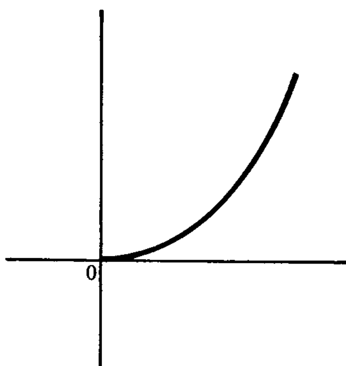
4. Sea $f(x) = x^3$. En este caso, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

A continuación se sugiere (sin prueba) una técnica para obtener la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de la función original.

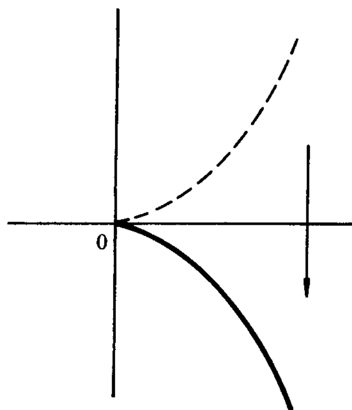
Paso 1: Dibújese la gráfica de f.



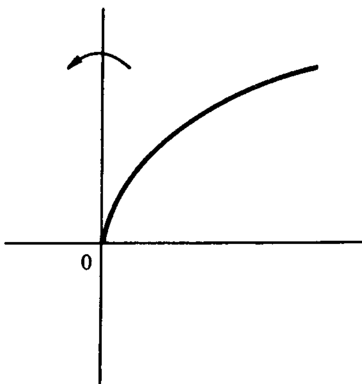
Paso 2: No se consideren orientados los ejes.



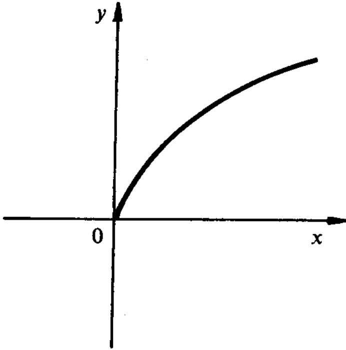
Paso 3: Refléjese respecto al eje x.



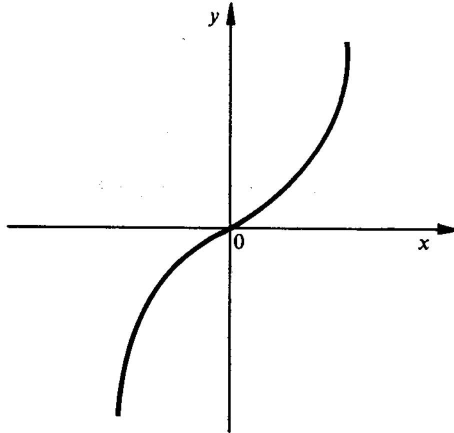
Paso 4: Gírese el plano 90° en sentido positivo.



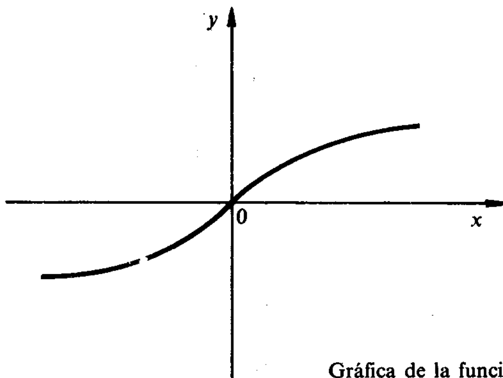
Paso 5: Vuélvanse a orientar los ejes en la forma usual.



Ejercicio A partir de la gráfica de la parábola cúbica



obténgase la siguiente, que es la de su función inversa.



Gráfica de la función $\sqrt[3]{x}$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas no son inyectivas, puesto que al ser periódicas toman valores iguales; por ejemplo, en puntos de sus dominios que difieren en el periodo (π para tan y cot, 2π para las restantes).

Por tanto, las funciones trigonométricas no son invertibles. Sin embargo, si se restringe en forma adecuada su dominio, se obtienen otras que resultan invertibles y cuyas funciones inversas se llaman funciones trigonométricas inversas.

Definición de las funciones trigonométricas inversas

Restrinjamos el dominio de la función sen a $[-\pi/2, \pi/2]$. Esto da origen a una función que se denotará por Sen. Es decir,

$$\text{Sen}: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$

y

$$\text{Sen}\, x = \text{sen}\, x \quad \text{para} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Es claro que la función Sen es inyectiva (Fig. 2.22) y, por consiguiente, existe su inversa.

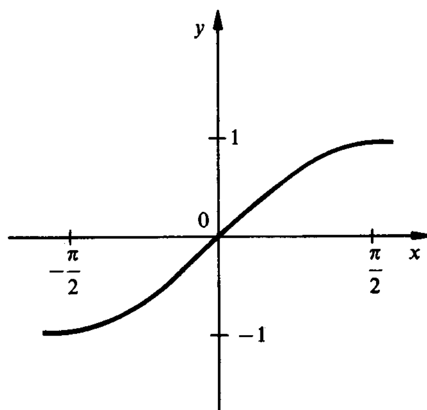


Fig. 2.22 $y = \text{Sen}\, x$.

La función inversa de Sen se denota por ang sen.

Por la definición de la función inversa, vemos que ang sen tiene por dominio el intervalo $[-1, 1]$ y por imagen $[-\pi/2, \pi/2]$. Además, para cada $x \in [-1, 1]$, ang sen x es el único real $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ que satisface la ecuación sen $y = x$.

La expresión ang sen x se lee «ángulo cuyo seno es x».

A continuación aparecen algunos valores de ang sen x en forma tabular.

x	ang sen x
1	$\pi/2$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$1/\sqrt{2}$	$\pi/4$
0	0
$-1/2$	$-\pi/6$

La gráfica de la función ang sen (Fig. 2.23) se obtiene por el procedimiento ya indicado.

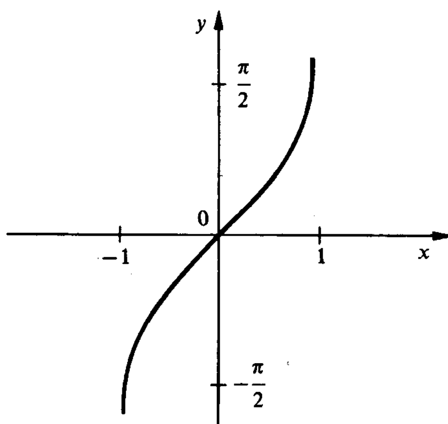


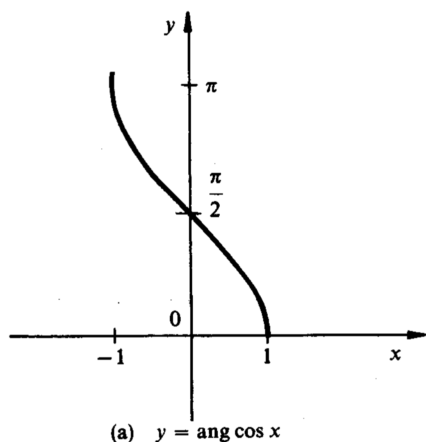
Fig. 2.23 y = ang sen x.

Las restantes funciones trigonométricas inversas se definen en forma semejante. A continuación, se dan los dominios e imágenes de estas funciones, y sus gráficas aparecen en la figura 2.24.

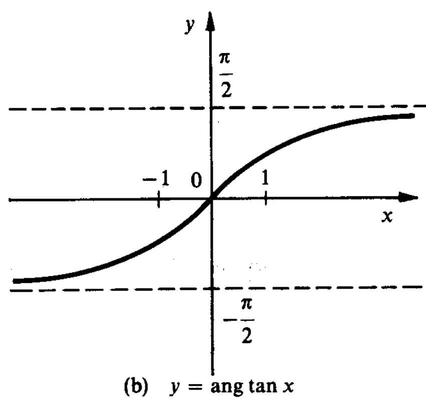
		Dominio	Imagen
(a)	ang cos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
(b)	ang tan	$(-\infty, \infty)$	$(-\pi/2, \pi/2)$
(c)	ang cot	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$
(d)	ang sec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
(e)	ang csc	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

Las expresiones ang cos x, ang tan x, etc., se leerán «ángulo cuyo coseno es x, ángulo cuya tangente es x», etc.

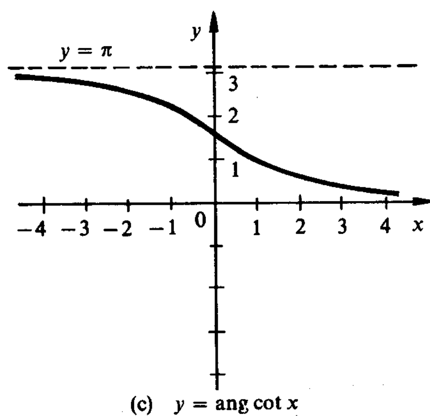
Las funciones introducidas se llaman algunas veces *ramas principales de las relaciones trigonométricas inversas*, para distinguirlas de aquellas que se obtendrían al restringir los dominios de las funciones trigonométricas a conjuntos distintos de los señalados, pues, como puede observarse, la manera de restringir esos dominios para obtener funciones invertibles no es única.



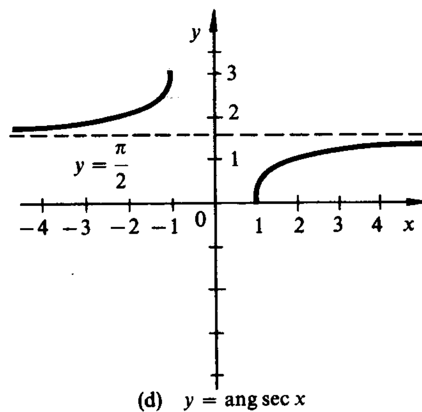
(a) $y = \text{ang}\cos x$



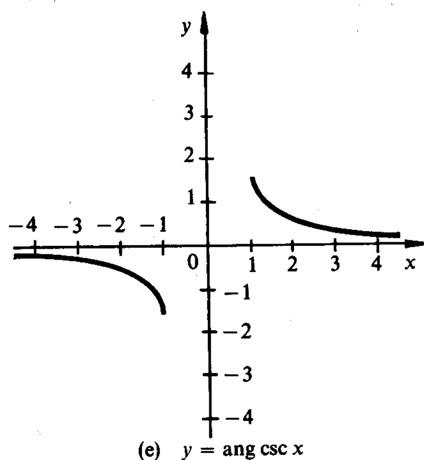
(b) $y = \text{ang}\tan x$



(c) $y = \text{ang}\cot x$



(d) $y = \text{ang}\sec x$



(e) $y = \text{ang}\csc x$

Figura 2.24

COORDENADAS POLARES

Coordenadas del plano distintas de las cartesianas

En esta sección se introducen coordenadas del plano distintas de las cartesianas. En geometría, las coordenadas cartesianas se utilizan para dar una descripción rigurosa de ciertos objetos planos, como curvas planas, regiones del plano acotadas por curvas cerradas, etc.

El objeto de introducir estas coordenadas, llamadas polares, es ampliar y, en algunos casos, facilitar tal descripción.

En el caso de las coordenadas polares denotamos a las coordenadas por (r, θ), según las razones expuestas más adelante. Para asociarlas con los puntos del plano, se hace lo siguiente: Se fija un punto O en el plano llamado polo y una semirrecta que parte de él llamada eje polar: dada (r, θ) se considera la semirrecta que a partir de O forma un ángulo θ (en radianes) con el eje polar; después se completa ésta a una recta l, y le asociamos distancias, a partir de O, positiva en la dirección θ y negativa en la dirección contraria; ahora se asocia a (r, θ) el único punto P sobre esta recta tal que la distancia dirigida de O a P sea exactamente r. En este caso, se dice que P tiene coordenadas polares (r, θ) o que (r, θ) son coordenadas polares para P.

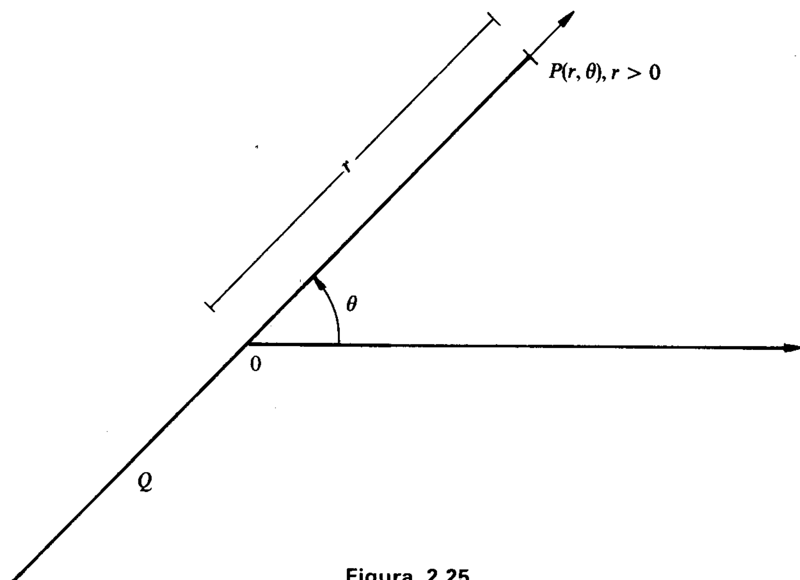


Figura 2.25

Observaciones

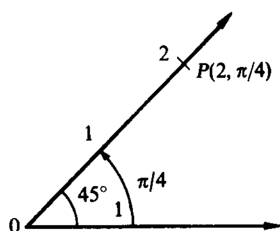
1) Si θ es mayor que 0, la dirección se determina en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y si θ es menor que 0, en el sentido de su movimiento.

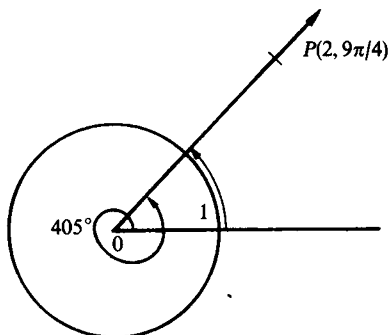
2) Puede observarse que infinidad de parejas (r, θ) van a dar a un mismo punto P; o en otras palabras, un mismo punto P tiene infinidad de coordenadas polares, pues $\theta, \theta + 2\pi, \theta + 2n\pi, \ldots$, determinan la misma dirección; por tanto, (r, θ), $(r, \theta + 2\pi), (r, \theta - 2\pi), \ldots, (r, \theta + 2n\pi)$, con n entero, son algunas de las coordenadas polares posibles para un mismo punto P.

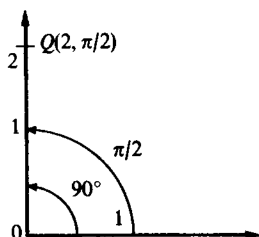
3) La dirección contraria a la dada por el valor θ está determinada por $\theta + \pi$; por tanto, las parejas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ son dos coordenadas distintas para un mismo punto P.

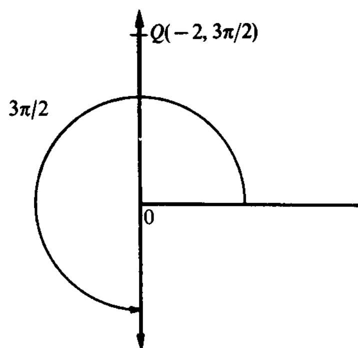
4) Sean P un punto del plano, distinto del origen, y (r, θ) unas coordenadas polares para P; si suponemos, primero, que $r > 0$, entonces P está en la semirrecta que pasa por el polo O y forma una dirección θ respecto al eje polar. Demos ahora otras coordenadas (r', θ') para P. Si $r' > 0$, de nuevo P está en la semirrecta de dirección θ' que pasa por O y θ' determina la misma dirección que θ. Así,

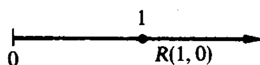
$$\theta' = \theta + 2n\pi, \qquad \text{con } n \text{ entero;}$$











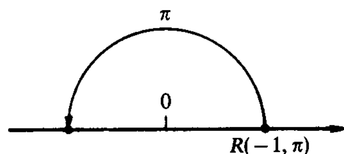


Fig. 2.26 Tres casos de puntos con dos coordenadas distintas.

así mismo,

$$r' = OP = r,$$

o sea,

$$(r', \theta) = (r, \theta + 2n\pi).$$

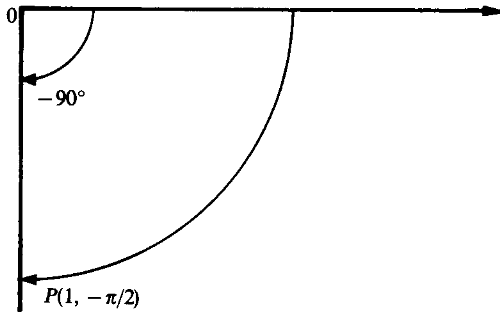


Fig. 2.27 Puntos con unas coordenadas (r, θ) con $\theta < 0$.

Si $r' < 0$, entonces, según 3), otras coordenadas para P son $(-r', \theta' + \pi)$, donde ahora $-r' > 0$, pero, de acuerdo con lo anterior, $-r' = r$ y $\theta' + \pi = \theta + 2n\pi$, con n entero, de donde

$$r' = -r, \quad \theta' = \theta - \pi + 2n\pi = \theta + \pi + 2n'\pi, \quad \text{con } n' = n - 1$$

Se ha probado así que, dadas unas coordenadas polares (r, θ) para P con $r > 0$, cualesquiera otras coordenadas de P son de la forma

$$(r, \theta + 2n\pi) \text{ o } (-r, \theta + \pi + 2n\pi), \text{ con } n \text{ entero.}$$

Para $r < 0$, se verifica lo anterior de forma análoga (Fig. 2.28).

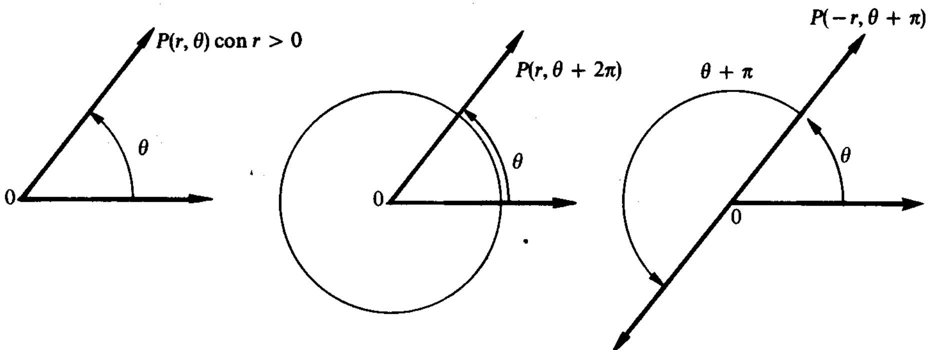


Figura 2.28

5) Esta función que establece coordenadas para puntos del plano es suprayectiva, es decir, todos los puntos del plano P están asociados con alguna pareja ordenada (r, θ). En efecto, dado un punto del plano P distinto del polo, con-

sideremos la semirrecta que pasa por el polo O y por P. El eje polar y esa semirrecta forman un ángulo θ_0, único, tal que $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$, y P dista r_0 del polo con $r_0 > 0$; así P será el punto asociado a la pareja (r_0, θ_0).

Estos valores, r_0 y θ_0, se llaman coordenadas polares principales de P (Fig. 2.29).

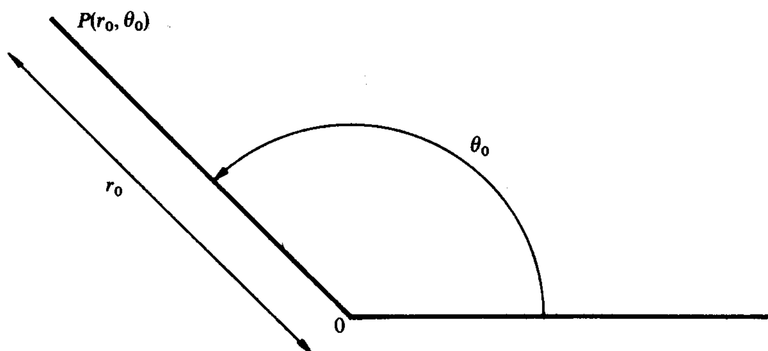


Figura 2.29

6) El polo O es el asociado de cualquier pareja de la forma $(0, \theta)$.

CURVAS

Con métodos de geometría analítica, se describirá, en forma polar, una curva plana asociándole, de ser posible, una ecuación del tipo

$$F(r, \theta) = 0 \qquad [2.18]$$

donde $F(r, \theta)$ es una función real de los parámetros r y θ.

Dicha ecuación es un modelo numérico de la curva y «funciona» de manera análoga a ella; mediante este modelo puede determinarse la tangente en un punto de la curva, la longitud de ésta, puntos de intersección de dos o más curvas, etc.

Dada también una ecuación del tipo [2.18], es posible determinar una única curva plana asociada a ella. Así puede establecerse una correspondencia entre ciertas curvas planas y sus ecuaciones en coordenadas polares. En forma esquemática, se tiene

curva Γ en el plano $\rightarrow$ ecuación $F(r, \theta) = 0 \rightarrow$ curva Γ

Para precisar estas ideas, revisemos el sentido de

ecuación $F(r, \theta) = 0 \rightarrow$ curva Γ

Dada una ecuación del tipo [2.18], primero se considera el conjunto de todas las parejas ordenadas de reales (r, θ) que satisfacen [2.18], y en seguida se define la

curva Γ asociada a [2.18] como el lugar geométrico de todos los puntos F del plano asociados a esas parejas ordenadas (r, θ). Así, P pertenece a la curva Γ si es el asociado de alguna (r, θ) tal que

$$F(r, \theta) = 0$$

A la inversa, si una curva Γ del plano puede interpretarse como el lugar geométrico de los puntos del plano que satisface cierta condición, la que a su vez puede interpretarse algebraicamente por medio de una ecuación del tipo

$$G(r, \theta) = 0, \qquad [2.19]$$

entonces se asocia a la curva Γ esa ecuación. Es decir, esta asociación se establece cuando todo punto P de la curva Γ tiene coordenadas (r, θ) tales que satisfacen [2.19] y, a la inversa, si una pareja (r, θ) satisface [2.19], el punto P correspondiente a esa pareja pertenece a Γ.

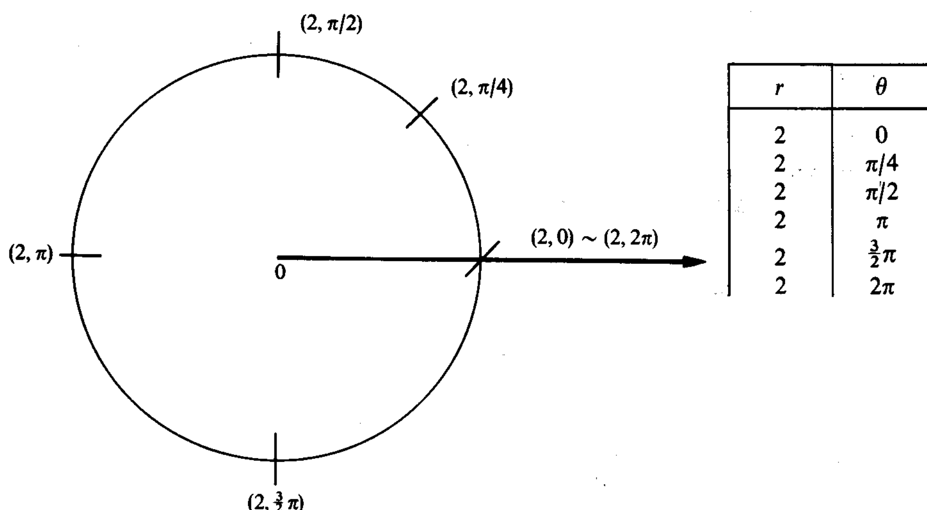
Ejemplifiquemos estos conceptos.

EJEMPLOS

1. Considérese la ecuación polar

$$r - 2 = 0$$

y tabúlense algunos valores (r, θ) que cumplan con la igualdad



r	θ
2	0
2	$\pi/4$
2	$\pi/2$
2	π
2	$\frac{3}{2}\pi$
2	2π

Esta curva ξ consta de todos los puntos que distan 2 del polo; por tanto, ξ es un círculo con centro en 0 y radio 2.

2. Considérese la recta que pasa por 0 y forma un ángulo α con el eje polar; supóngase que $0 \leqslant \alpha < \pi$ (Fig. 2.30).

Así, la ecuación polar de tal recta es

$$\theta = \alpha \qquad [2.20]$$

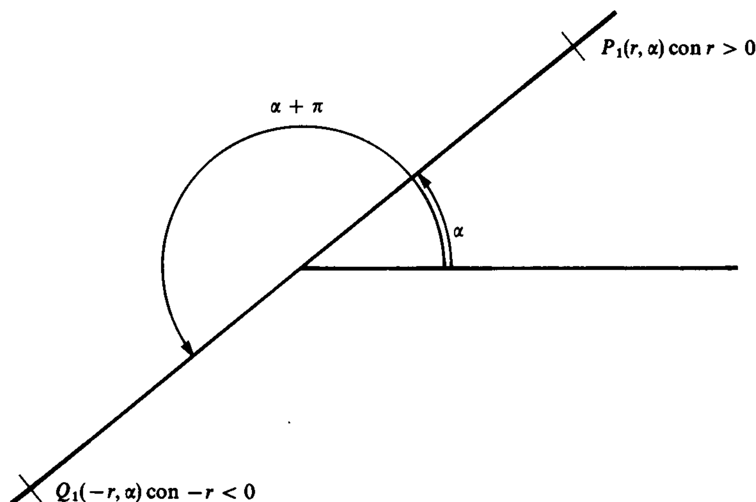


Figura 2.30

En efecto, si $P \neq 0$ está en la recta, en ese caso P estará en la semirrecta con dirección α o en la semirrecta con dirección $\alpha + \pi$. En el primer caso, tendrá coordenadas (r, α) con $r > 0$; en el segundo, $(-r, \alpha)$ con $r > 0$; por tanto, P tendrá siempre coordenadas polares cuya segunda componente es igual a α, mismas que satisfarán [2.20]; obsérvese que si $P = 0$, entonces sus coordenadas $(0, \alpha)$ satisfacen la ecuación.

3. Considérese la ecuación

$$r = 1 - \cos\theta$$

Para estudiarla, vemos su análoga cartesiana:

$$y = 1 - \cos x, \qquad [2.21]$$

a partir de la cual se obtienen relaciones entre direcciones y distancias dirigidas (véase Fig. 2.29).

De la figura 2.31 se obtiene la gráfica de [2.21] desplazando una unidad hacia arriba la gráfica de $-\cos x$ (Fig. 2.32).

De esta figura se obtiene la información siguiente:

Para el intervalo $[0, \pi]$ la función $1 - \cos x$ toma todos los valores entre 0 y 2, y la gráfica es simétrica respecto a la recta $x = \pi$.

En vista de esto, la gráfica de la ecuación polar $r = 1 - \cos\theta$ es la de la figura 2.33. A esta curva se le llama *cardioide.*

4. Considérese un círculo con centro en un punto P del eje polar y radio igual a OP positivo; estableceremos su ecuación polar. (Véase Fig. 2.34.)

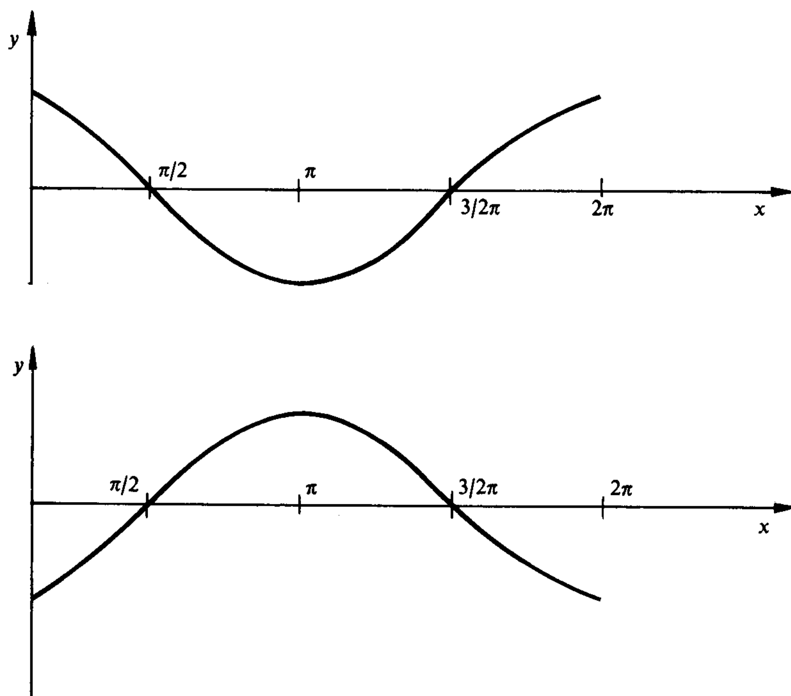


Fig. 2.31 Gráficas de cos *x* y de − cos *x*, la segunda de las cuales se obtiene reflejando la primera respecto al eje *x*.

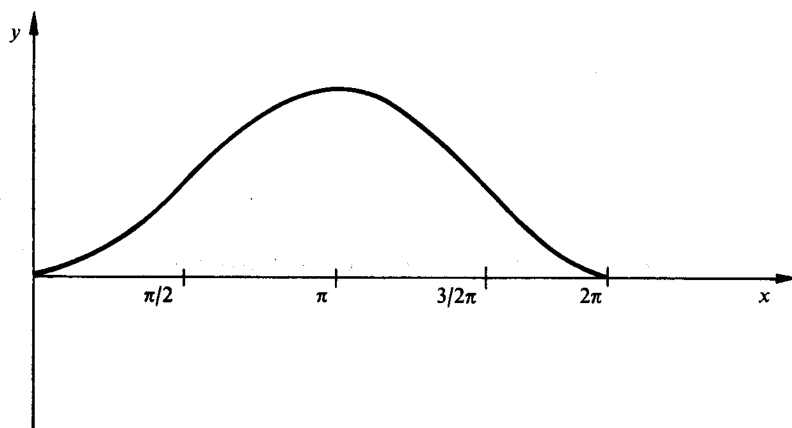


Fig. 2.32 Gráfica de $y = 1 - \cos x$.

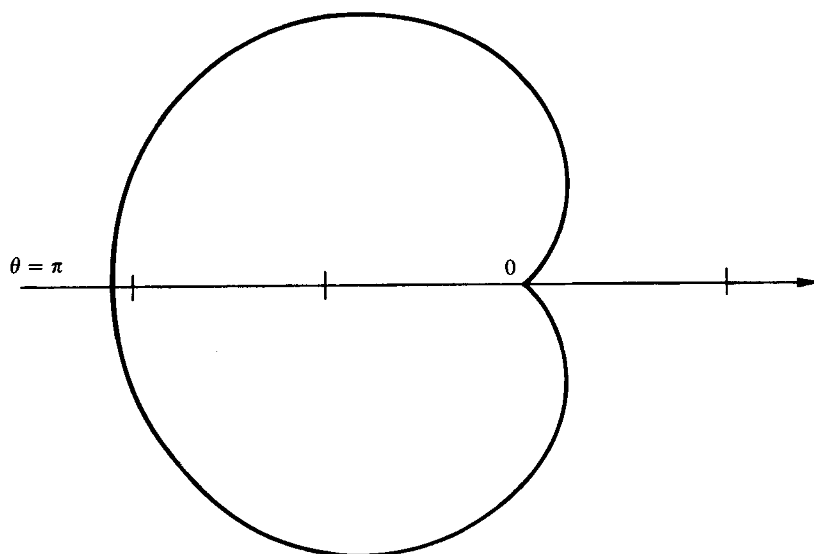


Fig. 2.33 Gráfica de $r = 1 - \cos\theta$.

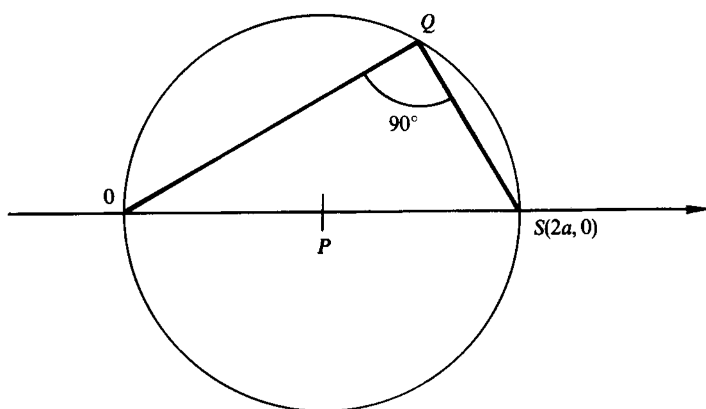


Figura 2.34

Hágase $a = OP$. Si Q es un punto cualquiera del círculo y el ángulo SOQ mide θ, entonces, por geometría elemental, se tiene

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OS}; \quad \text{por tanto, } OQ = OS\cos\theta,$$

y así la ecuación en coordenadas polares de ese círculo es

$$r = 2a\cos\theta$$

Si tenemos dado un sistema de coordenadas cartesianas para el plano, entonces es posible dar una relación con un sistema coordenado polar para éste. Esta transformación de coordenadas modifica también la escritura de la ecuación cartesiana $F(x, y) = 0$ de una curva Γ cualquiera, en el plano, a una ecuación polar $G(r, \theta) = 0$ correspondiente a la misma curva.

Para efectuar tal transformación se hace coincidir el polo O con el origen y el eje polar con el semieje x no negativo (se incluye el origen) (Fig. 2.35).

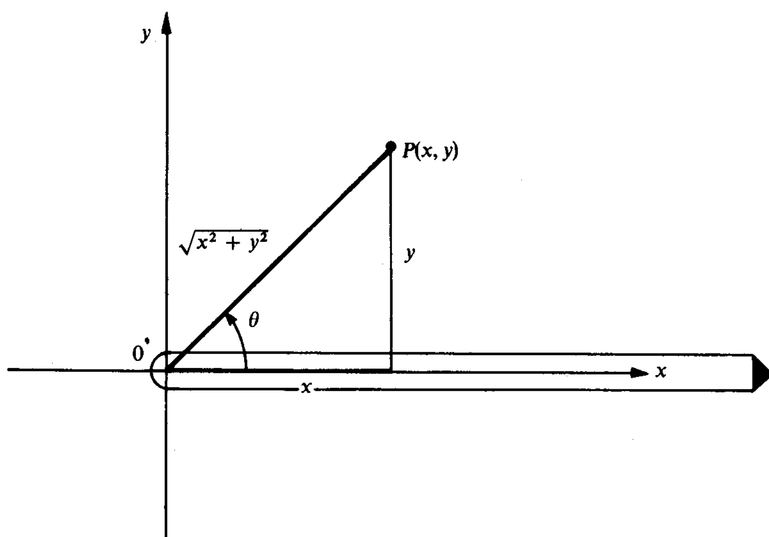


Figura 2.35

De la figura 2.35 se deduce que para un punto arbitrario P distinto del origen, se tiene

$$r = \bar{O}P = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad [2.22]$$

Encontramos coordenadas polares (r, θ) para P a partir de [2.22], tomando en cuenta que, para hallar θ, es necesario observar en qué cuadrante se localiza P, y entonces calcular el valor correspondiente de θ mediante tablas trigonométricas. Si P es el origen, entonces podemos darle las coordenadas polares $(0, \theta)$, en ese caso, con θ arbitrario.

En forma recíproca, para pasar de coordenadas polares a cartesianas, se sobrepone el eje x con el eje polar y el origen con el polo O.

Sea P un punto distinto del polo con coordenadas polares (r, θ), y supóngase primero que $r > 0$, entonces P está en la semirrecta que, al pasar por O, forma un

ángulo θ con el eje polar (ahora semieje x no negativo). De acuerdo con la figura 2.35, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}; \qquad x = r\cos\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}; \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{2.23}$$

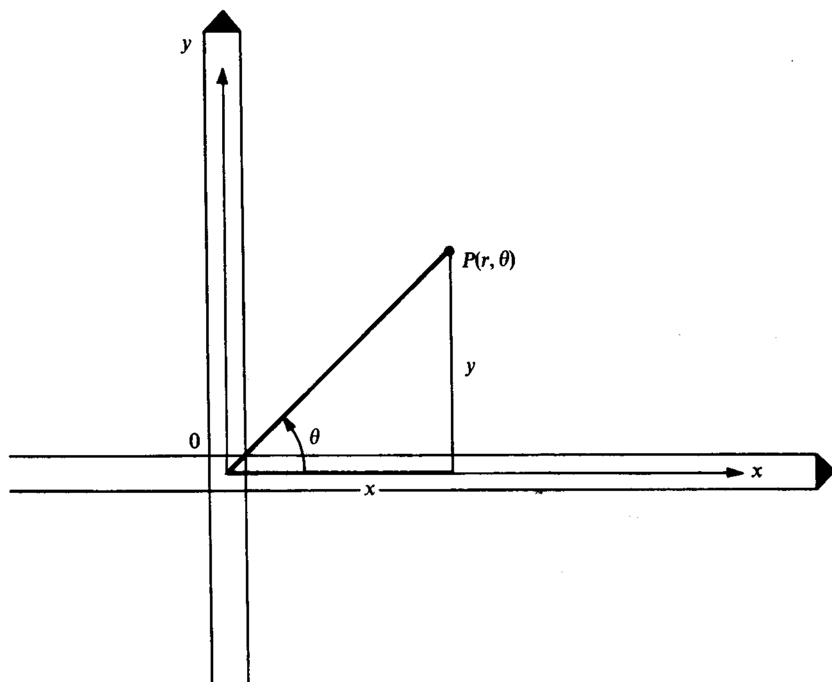


Figura 2.36

Si las coordenadas (r, θ) de P son tales que $r < 0$, entonces P está en la semirrecta que pasa por O y tiene una dirección $\theta + \pi$, contraria a la dirección θ, y $OP = -r$, $-r > 0$. Del planteamiento anterior, se observa que

$$x = -r\cos(\theta + \pi),$$
$$y = r\operatorname{sen}(\theta + \pi)$$

Si se usan las fórmulas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos, se tiene

$$x = -r(\cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi) = -r(-\cos\theta) = r\cos\theta,$$
$$y = -r(\operatorname{sen}\theta\cos\pi + \operatorname{sen}\pi\cos\theta) = -r(-\operatorname{sen}\theta) = r\operatorname{sen}\theta$$

Las dos últimas igualdades verifican [2.23] cuando r es negativo. El polo tiene a $(0, 0)$ como coordenadas cartesianas.

Obsérvese que

$$r\cos(\theta + 2n) = r\cos\theta,$$
$$r\,\mathrm{sen}(\theta + 2n) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y

$$-r\,\mathrm{sen}(\theta + \pi + 2n\pi) = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$
$$-r\cos(\theta + \pi + 2n\pi) = r\cos\theta$$

Por consiguiente, la transformación [2.23] toma los mismos valores en (r, θ), $(4, \theta + 2n\pi)$ y $(-r, \theta + \pi + 2n\pi)$, con n entero, que equivale a decir que las coordenadas cartesianas (x, y) de P pueden obtenerse por [2.23] a partir de cualquiera de sus coordenadas polares (recuérdese que a un punto P pueden asignársele infinidad de parejas (r, θ), llamadas coordenadas polares de P).

En el caso de la transformación de ecuaciones cartesianas en polares, puede hacerse lo siguiente:

EJEMPLO Sea ξ un círculo con centro en P de coordenadas (x_0, y_0) y radio $a > 0$; se sabe que su ecuación cartesiana es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

o bien,

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 = a^2 \qquad [2.24]$$

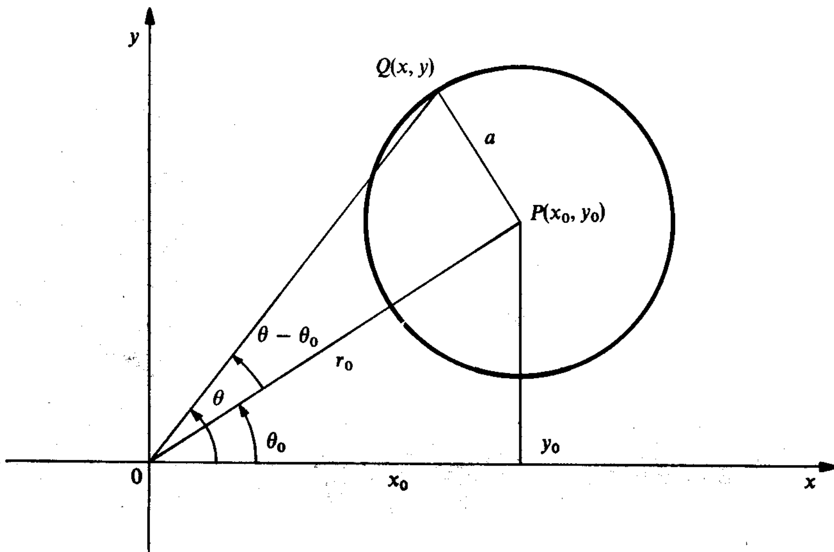


Fig. 2.37 Circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio a.

A partir de la figura 2.37, tenemos que

$$\begin{aligned} r_0 &= OP = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ x_0 &= r_0 \cos\theta_0 \\ y_0 &= r_0 \operatorname{sen}\theta_0 \end{aligned} \qquad [2.25]$$

Si se sustituye en la ecuación [2.24], se obtiene

$$r^2 \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2rr_0 \cos\theta \cos\theta_0 - 2r_0 r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta_0 + r_0^2 = a^2$$

Al agrupar términos con factores comunes y usar identidades trigonométricas, se tiene

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = a^2,$$

que es la ecuación polar de dicho círculo. (Esta relación entre r y a no es más que la ley de los cosenos.)

Ejemplo del cambio de ecuaciones polares en cartesianas. Considérese la ecuación $r = \theta$, con $\theta > 0$, cuya curva asociada se representa en la figura.

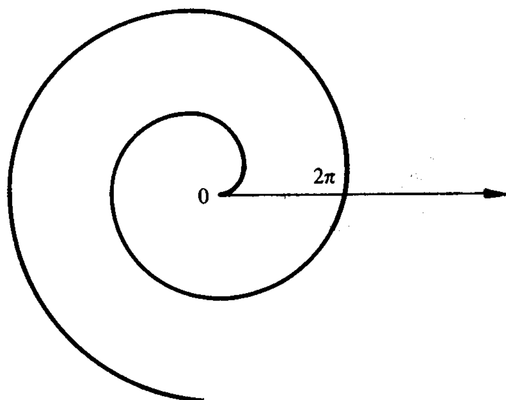


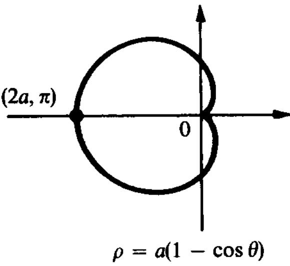
Fig. 2.38 Espiral.

Transfórmese primero $r = \theta$ en $\operatorname{sen} r = \operatorname{sen}\theta$. Mediante [2.22], se obtiene

$$\operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

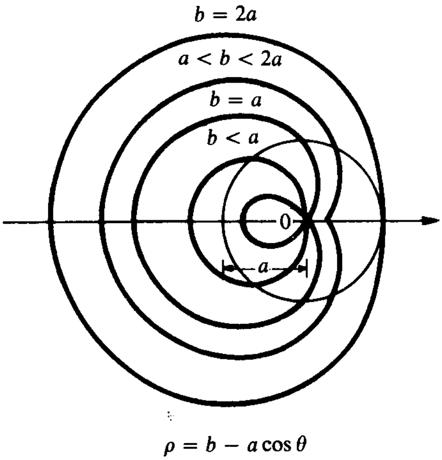
como expresión cartesiana de la espiral.

GRAFICAS DE CURVAS CUYA EXPRESION ESTA DADA EN FORMA POLAR



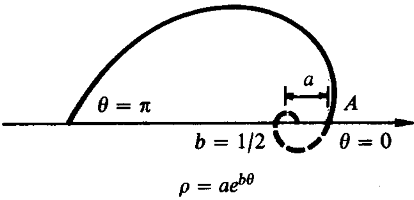
$\rho = a(1 - \cos\theta)$

Fig. 2.39 Cardioide.



$\rho = b - a\cos\theta$

Fig. 2.40 Caracol de Pascal.



$\rho = ae^{b\theta}$

Fig. 2.41 Espiral logarítmica.

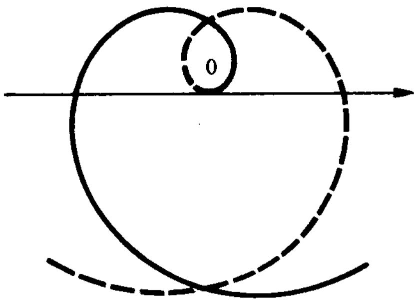
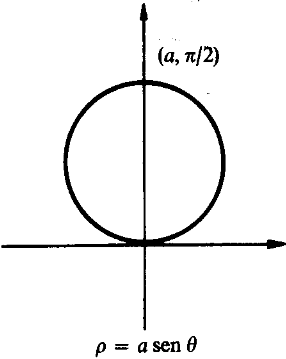


Fig. 2.42 Espiral de Arquímedes.



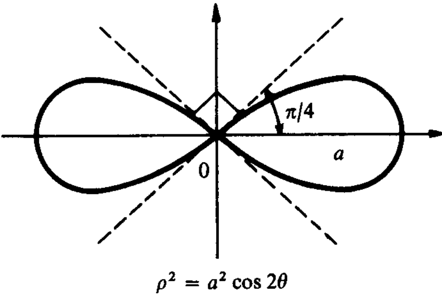
$\rho = a \operatorname{sen}\theta$

Fig. 2.43 Círculo.

(Ejercicio, dibújelo.)

$\rho = a$

Fig. 2.44 Círculo.



$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

Fig. 2.45 Lemniscata de Bernoulli.

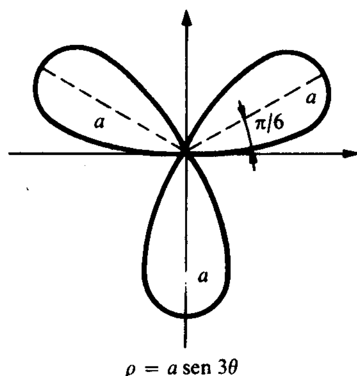


Fig. 2.46 Rosa de tres pétalos.

(Ejercicio, dibújelo.)

$\rho = a \cos 3\theta$

Fig. 2.47 Rosa de tres pétalos.

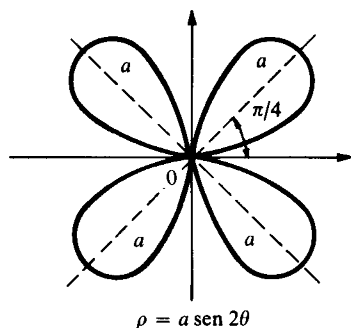


Fig. 2.48 Rosa de cuatro pétalos.

(Ejercicio, dibújelo.)

$\rho = a \cos 2\theta$

Fig. 2.49 Rosa de cuatro pétalos.

EJERCICIOS

2.1 Hállense $f(3)$, $f(-5)$, $-f(5)$, $f(\frac{1}{2})$, $1/f(2)$, si $f(x)$ es:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x - 4}$ b) $f(x) = (ax^3 + 1)(bx^2)$ c) $f(x) = \dfrac{1}{25 - x}$

2.2 Explíquese por qué la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ no es la gráfica de una función.

2.3 Si se supone que f es una función lineal y $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$, encuéntrese la regla de correspondencia de la función.

2.4 Sea $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{(\operatorname{sen} x)(x^3 - 1)}$; díganse cuáles de los puntos siguientes pertenecen al dominio de la función: 0, 1, -1, $\pi/2$, $-\pi/2$, 3π.

2.5 Exprésese la función $x^2 + 3x + 2$ como producto de dos funciones lineales.

2.6 ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función $f(x) = x/|x|$? Represéntese gráficamente la función.

2.7 Mediante una sola fórmula escríbase la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

[*Sugerencia:* Utilícese la función valor absoluto.]

2.8 Sea $f(x) = (1 - x)/(1 + x)$; demuéstrese que

$$\frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)} = \frac{1 - xy}{x + y},$$

siempre que ambos cocientes estén definidos.

2.9 Sean $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x$. Determínese:
a) $f + g$ b) fg c) $f - g$ d) g/f e) f/g

2.10 Por medio de una ecuación, exprésese el radio de un círculo como una función de su área.

2.11 Sea $g(x) = x$. Calcúlense $g(a + h) - g(a)$ y $\dfrac{g(a + h) - g(a)}{h}$.

2.12 La forma en que se desplaza un automóvil se ajusta a la regla siguiente:

$$r(t) = \begin{cases} 60t & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 15 \\ 90(t - 5) & \text{para } 15 \leqslant t, \end{cases}$$

donde $r(t)$ está dada en metros y t en segundos. Descríbase la función que resulta al medir la distancia r en kilómetros y el tiempo t en horas.

2.13 Hállese la fórmula de transformación (ésta es lineal) de la escala de grados (C) Celsius (centígrados) a la de grados Fahrenheit (F), si se sabe que 0 °C equivale a 32 °F, y 100 °C a 212 °F.

2.14 Encuéntrese el dominio natural de las funciones siguientes:

a) $\dfrac{1}{4 - x}$ b) $x + 1$

c) $2 + x - x^2$ d) $\dfrac{x - 1}{2 + x}$

e) $\dfrac{(x + 2)(x + 1)}{x + 2}$ f) $\operatorname{sen} 2x$

g) $\operatorname{ang\,cos} \dfrac{2x}{1 - x^2}$ h) $\sqrt{2 + x - x^2}$

i) $\sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$ j) $\sqrt[3]{x^5 + 4x^3 - 2x + 3}$

2.15 Constrúyanse las gráficas de las funciones.

a) $f(x) = -3x + 5$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

c) $h(x) = \cos 3x$ d) $j(x) = x - |x|$
e) $f(x) = b - a\cos x$ f) $f(x) = a(1 - \operatorname{sen} x)$
g) $i(x) = a\sqrt{\cos 2x}$ h) $j(x) = a\cos^2 x$

2.16 Pruébese que las funciones siguientes son periódicas.

a) $\tan x$ b) $\operatorname{sen} 2x$
c) $\cos(x + \pi)$ d) $(\operatorname{sen} bx)$

Indíquese en cada caso cuál es el periodo.

2.17 Pruébense las relaciones trigonométricas siguientes:

a) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
b) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
c) $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
d) $\tan(-x) = -\tan x$
e) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
f) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
g) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$
h) $2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)$
i) $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$
j) $\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - y)$

2.18 Hállese el polinomio que tenga una raíz doble en 1, raíces simples en -1 y 0 y ninguna otra.

2.19 Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Obténgase la gráfica de las funciones siguientes:

a) $f(\frac{1}{2}x)$ b) $3 + f(x)$
c) $4f(x)$ d) $f(-x)$
e) $-f(x)$ f) $f(5x)$

2.20 Hágase lo mismo que en el ejercicio anterior, pero para $f(x) = \cos x$.

2.21 Pruébense las relaciones siguientes:

a) $\operatorname{ang} \sec x = \operatorname{ang} \cos 1/x$; $x \in \operatorname{dom}(\operatorname{ang} \sec)$
b) $\operatorname{ang} \csc x = \operatorname{ang} \operatorname{sen} 1/x$; $x \in \operatorname{dom}(\operatorname{ang} \csc)$
c) $\operatorname{sen} \operatorname{ang} \cos x = \cos \operatorname{ang} \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - x^2}$; $x \in [-1, 1]$
d) $\sec \operatorname{ang} \tan x = \csc \operatorname{ang} \cot x = \sqrt{1 + x^2}$; $x \in (-\infty, \infty)$
e) $\cot^2 \operatorname{ang} \csc x = x^2 - 1$; $x \in \operatorname{dom}(\operatorname{ang} \csc)$

2.22 Se dice que una función f es par si $f(x) = f(-x)$, e impar si $f(x) = -f(-x)$, para todo x en el dominio de f. (Obsérvese que pedimos implícitamente que para cada x en el dominio de f, $-x$ pertenezca también al dominio de f.) Determínense cuáles de las funciones siguientes son pares y cuáles son impares.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $g(y) = \cos y$
c) $h(u) = u$ d) $g(x) = x^2$
e) $h(x) = x^2 - x$ f) $k(x) = (2x)/(x + 1)$

De estos incisos, obsérvese que hay funciones que no son pares ni impares. Constrúyase en cada caso la gráfica de la función.

2.23 Demuéstrese que la gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y, y que la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

2.24 Pruébese que el producto de dos funciones pares o de dos funciones impares es par, mientras que el producto de una función impar por una par es impar.

2.25 Sea $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Pruébese que existen dos funciones f y g, la primera par y la segunda impar, tales que $h(x) = f(x) + g(x)$ para todo x. [*Sugerencia:* f y g deben satisfacer las ecuaciones siguientes: $h(x) = f(x) + g(x)$ y $h(-x) = f(x) - g(x)$.]

2.26 Represéntense gráficamente las ecuaciones polares siguientes:

a) $r = 3$ b) $r = 2\theta$ c) $r = \cos\theta$
d) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ e) $r = |\operatorname{sen} 3\theta|$ f) $r = 6\cos\theta$
g) $r = a \operatorname{sen}\theta, a > 0$ h) $r = 1 + \cos\theta$ i) $r = \tan\theta$
j) $r = 5 + 2\operatorname{sen}\theta$ k) $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ l) $r^2 = \operatorname{sen}\theta$

2.27 Cámbiense las ecuaciones polares siguientes a coordenadas rectangulares.

a) $\theta = 2$ b) $r = 4$ c) $r = 3\operatorname{sen}\theta$
d) $r = 2\cos\theta$ e) $r = \cos\theta$ f) $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$
g) $r = 1/\cos\theta$ h) $r = 1/\operatorname{sen}\theta$ i) $r = 1/(1 - \cos\theta)$

Johannes Kepler
(1571 a 1630)

Michael Mästling, profesor de astronomía de Kepler en la Universidad de Tubinga, creía con firmeza en el sistema propuesto por Nicolás Copérnico: la Tierra es un planeta que a diario gira alrededor de su propio eje y cada año completa una revolución alrededor del Sol. La aceptación por Kepler, en su juventud, de este hecho afectó el curso de su vida.

Su primer trabajo publicado, que después le condujera a enunciar sus tres leyes sobre el movimiento de los planetas, lo realizó en Tubinga y lo tituló Misterio cosmográfico (Prodomus dissertationum. Mathematicarum contineus mysterium cosmographicarum). *Para escribirlo se basó en una visión de las armonías matemáticas en los cielos derivada de la filosofía de Platón y las matemáticas pitagóricas; intentaba relacionar las órbitas planetarias con sólidos regulares geométricos. Este trabajo impresionó a Tycho Brahe, entonces matemático del Sacro Imperio Romano, quien le invitó a unirse, cerca de Praga, a su equipo de trabajo. Un año después, al morir Brahe, Kepler ocupó su puesto. En esa época se creía que la Tierra, por ser un cuerpo perfecto, debía moverse en círculos perfectos o combinaciones de éstos. En sus observaciones de la órbita de Marte, Kepler trató de ajustarla a esa creencia; al no lograrlo, buscó otra órbita que no fuera circular, hallando la solución: Marte, al igual que los demás planetas, gira en una órbita elíptica en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.*

La producción de Kepler es muy amplia; baste mencionar, por último, su importante contribución a la óptica, habiendo sido el primero en explicar el funcionamiento del ojo humano.

En forma paralela a la vida de Kepler se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Shakespeare: *Hamlet*, 1601; *Otelo*, 1604; *Macbeth*, 1606.

MUSICA

Monteverdi: *Orfeo*, 1607.

Schütz: *Salmos de David,* 1619; *Daphne,* 1627; *Symphóniae Sácrae, primera parte,* 1629.

PINTURA

Caravaggio: *Muerte de la Virgen,* 1605; *Cena de Emaús,* 1607.
Greco, el: *Retrato del Cardenal Fernando Niño de Guevara,* 1600; *Vista de Toledo,* 1610.
Rubens: *Los doce apóstoles,* 1603; *El Tocado de Venus,* 1612.

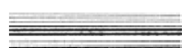
CULTURA EN GENERAL

Se inicia la construcción de Versalles, 1624.
Harvey (fisiólogo): *Circulación sanguínea,* 1615.



Johannes Kepler

3



CONTINUIDAD

INTRODUCCION

En general, nuestra vida se desarrolla de tal modo que es posible encontrar lapsos, cortos o prolongados, sin alteraciones mayores, por lo menos en aspectos generales como: salud, desarrollo físico y mental, situación económica, etc. Por ejemplo, la estatura, el peso y la estabilidad emocional de un hombre normal a los 20 años, difieren en gran medida de aquellos que tenían a los 10 años. Sin embargo, si se le considera en edades entre los 19 y 21 años, la diferencia será muy pequeña.

De igual manera, al analizar los fenómenos físicos, económicos, políticos y sociales, se encuentra, en la mayoría de los casos, que las características de algunos de esos fenómenos en un momento dado son similares a las que tenía en todo instante suficientemente próximo al considerado.

Analicemos, por ejemplo, cómo varía la posición de un cuerpo (al cual suponemos puntual, concepto usado en física que significa considerar representado a un cuerpo, con todas sus propiedades, mediante un punto) originalmente en reposo que al tiempo $t = 0$ empieza a caer bajo la acción de la fuerza de gravedad.

El lector coincidirá con nosotros en que para todo instante t «suficientemente próximo a» un instante t_0, la posición del cuerpo fue casi la misma que para dicho instante t_0.

Como se vio en el ejemplo de la caída libre de los cuerpos, en este caso, el movimiento del cuerpo se rige por la fórmula

$$h(t) = \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde g representa la aceleración debida a la fuerza de la gravedad y $h(t)$, la distancia recorrida por el cuerpo al instante t, medida a partir de la posición del cuerpo al tiempo $t = 0$ y en la dirección de la aceleración g.

En otras palabras, el conjunto de números reales se da como modelo del tiempo, asociando un instante a cada número real, y viceversa. Aquí, esta asociación se establece de manera que, en el instante en que el cuerpo empieza

a caer, le corresponde el número real 0, y en cualquier instante posterior, le corresponde un real positivo. Así mismo, la posición del cuerpo se interpreta como una función del tiempo (de los números reales), cuya regla de asociación está dada por [3.1].

Cabe aclarar que no obstante que la función

$$h(t) = \tfrac{1}{2}gt^2$$

está definida para todo número real t, sólo interpreta al movimiento considerado cuando t varía entre 0 y $\bar{t}$, donde $\bar{t}$ representa el instante en que el cuerpo choca con la Tierra, es decir, cuando $t \in [0, \bar{t}]$.

Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, la función h tiene la propiedad siguiente:

$$h(t) \cong^* h(t_0)$$

para todo t «suficientemente próximo» a t_0 (Tabla 3.1), o sea, la función h refleja la información obtenida al observar la caída del cuerpo.

TABLA 3.1

t	$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$
.95	$.9025\,\frac{g}{2}$
.999	$.998001\,\frac{g}{2}$
.99999	$.9999800001\,\frac{g}{2}$
$1(=t_0)$	$\frac{g}{2}$
1.000001	$1.000002000001\,\frac{g}{2}$
1.0001	$1.00020001\,\frac{g}{2}$
1.003	$1.006009\,\frac{g}{2}$

* El símbolo $\cong$ se lee «aproximadamente igual a».

Más adelante se proporcionan otros ejemplos de funciones que satisfacen la propiedad señalada para *h*.

Por consiguiente, dentro de la colección de funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$, existen algunas que se comportan en la forma sugerida por gran parte de nuestras observaciones del mundo que nos rodea y nuestra experiencia. Llamaremos a estas funciones *continuas* en $\mathbb{R}$.

Antecedentes a la definición de función continua

Por lo anterior se tiene, como primer intento de definición de función continua en $\mathbb{R}$, lo siguiente:

I. Una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ si *para cada* $x_0 \in \mathbb{R}$ satisface la propiedad siguiente:

$f(x) \cong f(x_0)$ para todo x suficientemente próximo a x_0 **[P]**

El que una función satisfaga, aunque sólo sea en un punto, la propiedad [P], es de por sí importante, por la información que entonces se obtiene del comportamiento de la función en la proximidad de ese punto; en consecuencia, es conveniente tener alguna forma de señalarlo; por esto y por lo expuesto con anterioridad, resulta natural establecer que:

II. Una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ es continua en un punto si satisface la propiedad [P] para este punto.

Con esto podemos volver a formular I de la manera siguiente:

I′. Una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto de $\mathbb{R}$.

En las expresiones I y II aparecen términos vagos, como «aproximadamente igual a» y «suficientemente próximo a»; por ello no los llamamos definiciones. Sin embargo, es posible considerarlos como los primeros intentos por establecer las definiciones de función continua en $\mathbb{R}$ y función continua en un punto.

Más aún, aquellas se obtendrán precisando las ideas encerradas en I y II.

«Aproximadamente igual a»

Puede considerarse que dos objetos son aproximadamente iguales si la diferencia entre ellos no sobrepasa cierta medida o patrón establecidos.

En el caso de los números reales, que pueden interpretarse como puntos de una recta, es posible imaginar que este patrón está dado por una regla *r*

y, según esta medida, dos números a y b son aproximadamente iguales (próximos) si dicha regla logra acomodarse de manera que los puntos a y b estén entre sus extremos (Fig. 3.1).

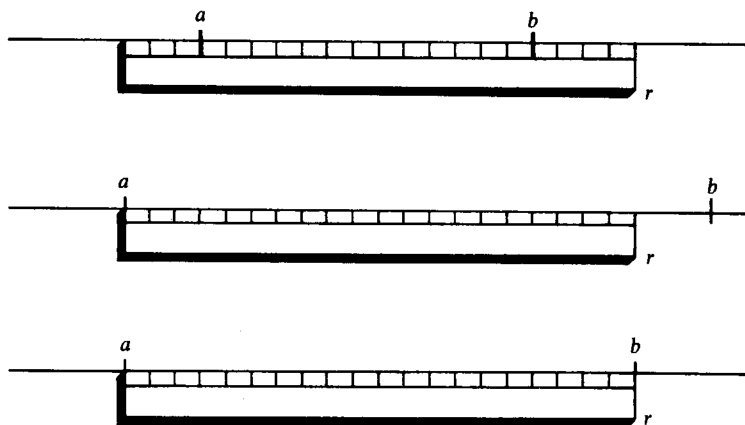


Fig. 3.1 En el primer caso, $a \cong b$ según la regla r; en el segundo y tercero, $a \ncong b$ según la regla r.

Nótese que la condición de que los puntos a y b estén entre los extremos r equivale a que la distancia entre ellos sea menor que la longitud de r; es decir, $a \cong b$ según r si, y sólo si,

$$|b - a| < \varepsilon;$$

donde ε representa la longitud de r. En lo sucesivo se designará por el mismo símbolo a la regla y a su longitud, y para esto se usarán, fundamentalmente, las letras ε y δ.

«*Suficientemente próximo a*»

Ciertas condiciones amplían o reducen nuestro sentido de proximidad.

Por ejemplo, muchos no consideran próximos dos cuerpos distantes entre sí 384 400 km (distancia media de la Tierra a la Luna). Sin embargo, todos coincidimos en que estos cuerpos celestes están lo suficientemente próximos para realizar viajes entre ellos, utilizando los medios actuales.

A la inversa, casi todos coincidimos en que las ciudades de México y Cuernavaca son próximas (85 km), pero no lo suficiente para realizar un viaje en automóvil en menos de 10 min.

En el primer ejemplo, ampliamos nuestra medida de proximidad; en el segundo, la reducimos; en ambos, el cambio se indicó mediante la expresión «suficientemente próximo a».

De la misma manera, en el caso que nos ocupa, «suficientemente próximo a» significará buscar una regla apropiada (tal vez mayor, tal vez menor o

inclusive igual a la que se tenía originalmente) tal que para todos los puntos próximos, según esta medida, se satisfaga la condición de «aproximadamente igual a» aparecida en la propiedad [P] $\big(f(x) \cong f(x_0)$ para todo x suficientemente próximo a $x_0\big)$.

Un paso más hacia la definición de función continua

Por lo anterior, una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad [P] en un punto x_0 para la medida de proximidad dada por la regla ε, si se logra encontrar una regla δ para la cual

$f(x) \cong f(x_0)$ según la regla ε para todo $x \cong x_0$ según la regla δ.

Se dirá que la función es continua en x_0 si es posible hacer lo anterior para cada regla ε. Es decir:

III. Una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto x_0 si *para cada* regla ε puede encontrarse una regla δ para la cual

$f(x) \cong f(x_0)$ *según la regla* ε, *para todo* $x \cong x_0$ *según la regla* δ. **[P′]**

De acuerdo con el capítulo anterior, toda función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede interpretarse como una función de la recta en sí misma (Fig. 3.2).

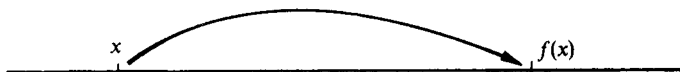


Figura 3.2

Observación En la exposición se considerarán, en general, dos copias x e y de la «recta real», de tal suerte que, sobre x, marcaremos los valores de los puntos del dominio de la función, y sobre y, los que la función toma. Por lo mismo, x e y se tomarán paralelas, excepto, por ejemplo, cuando interesa referirse a la gráfica de una función; en este caso, se tomarán ortogonales e intersectándose en el punto que en cada una corresponde al cero.

En vista de esto, es posible considerar, en lugar de la figura 3.2, la siguiente:

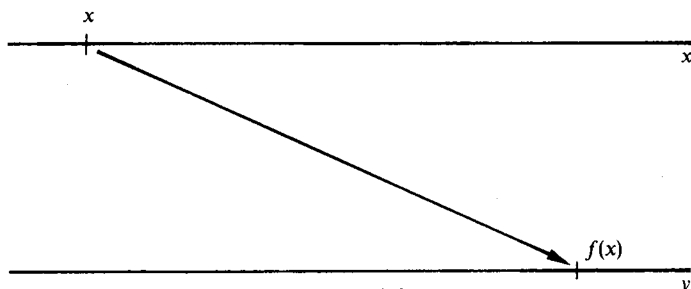


Figura 3.3

Lo cual permite dar la siguiente interpretación gráfica de la propiedad [P′]

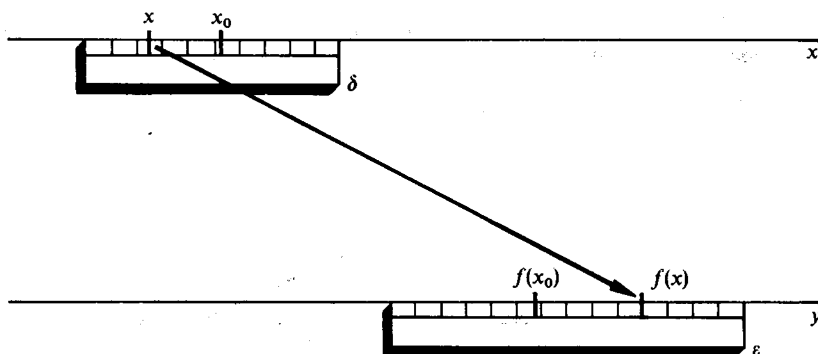


Figura 3.4

DEFINICION DE FUNCION CONTINUA

Sean x_0 un número real y ε una regla. Al colocar ε en la forma indicada en la figura 3.5, se obtienen dos puntos c y d, con la propiedad de que todos los puntos x para los cuales puede acomodarse la regla ε, de modo que x y x_0 estén entre sus extremos (es decir, $x \cong x_0$ según la regla ε), son aquellos mayores que c y menores que d, es decir, los pertenecientes a (c, d).

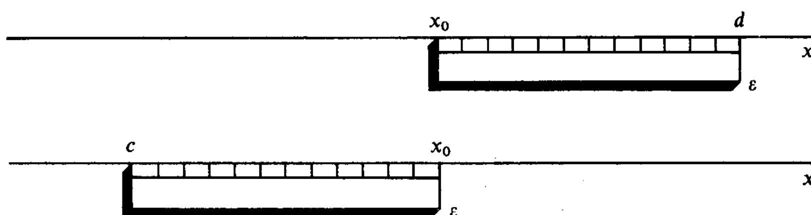


Figura 3.5

Por consiguiente, según la regla ε, el conjunto de puntos próximos a x_0 es un intervalo abierto. Más aún, dicho intervalo tiene por centro al punto x_0, y su radio es igual a ε; es decir, x_0 es el punto medio del intervalo, y la longitud de éste es 2ε.

Entonces, debe ser evidente lo siguiente:

DEFINICION 3.1 *Una vecindad de un punto a es un intervalo abierto con centro en ese punto, y el valor de la distancia entre a y cualquiera de los extremos del intervalo se llama* radio de la vecindad.

Por todo lo anterior, podemos describir III así:

DEFINICION 3.2a *Una función* $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en un punto* x_0 *si para cada vecindad* J *de* $f(x_0)$ *existe una vecindad* J_0 *de* x_0 *tal que*

$$f(x) \in J \text{ para todo } x \in J_0 \text{ (Fig. 3.6).}$$

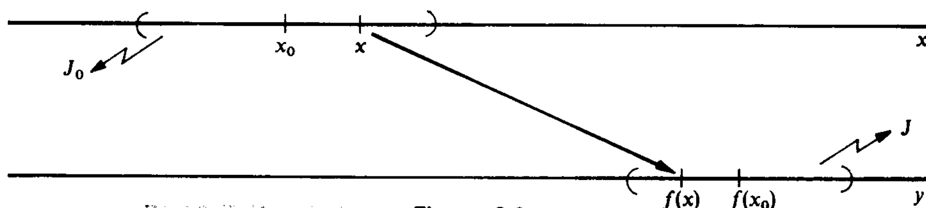


Figura 3.6

Teniendo fijo un punto a es posible identificar cada una de sus vecindades con su radio (un número real positivo). Así, proponer encontrar una vecindad equivale a proponer encontrar un número positivo. Además, si J es una vecindad de radio r del punto a, entonces b pertenece a J si, y sólo si, $|b - a| < r$ (Fig. 3.7).

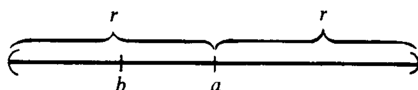


Figura 3.7

Estos comentarios permiten escribir la definición anterior de la manera siguiente, la cual se utilizará en lo sucesivo.

DEFINICION 3.2b *Una función* $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en un punto* x_0 *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Fig. 3.8).

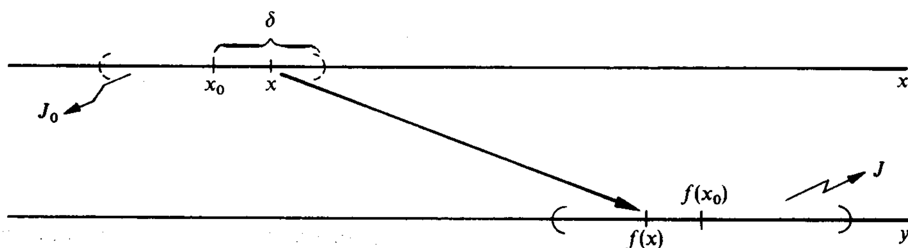


Figura 3.8

En la figura 3.8, la vecindad dada se indica con paréntesis de línea continua, y la que se encuentra, con paréntesis de trazo discontinuo.

Notas sobre la definición 3.2b

1. Es claro que si para $\delta > 0$ se cumplen las relaciones de la definición 3.2b, entonces para todo δ' positivo y menor que δ se verifican también las mismas relaciones (Fig. 3.9). Así, el real δ no es único.
2. δ debe determinarse para cada $\varepsilon > 0$ propuesto; basta que no sea posible encontrar para un $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ con la propiedad requerida, para que la función *no sea continua* en el punto x_0; en este caso, se dirá que la función es *discontinua* en x_0.
3. Una vez que se tiene la definición 3.2, entonces I′ (pág. 86) adquiere un significado preciso; por tanto, esa será, sin ninguna modificación, la definición de función continua en $\mathbb{R}$, o sea:

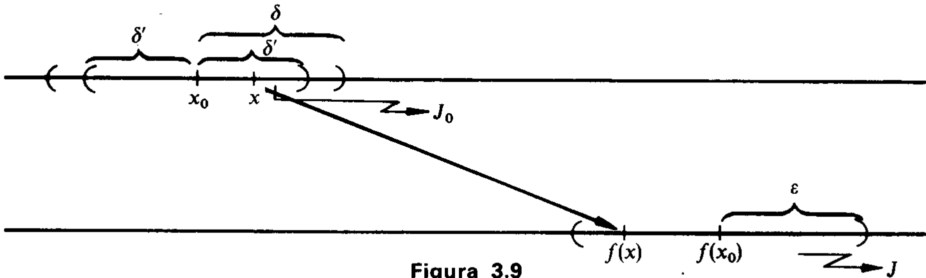


Figura 3.9

DEFINICION 3.3 *Una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto de $\mathbb{R}$.*

Antes de dar ejemplos de funciones continuas se ilustrará el manejo, en casos concretos, de los números ε y δ que aparecen en el contexto de la definición de función continua.

1. Sean $f(x) = 5x$, $x_0 = 2$ y $\varepsilon = 0.01$. Se desea probar la existencia de un $\delta > 0$ tal que si $|x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - f(2)| < 0.01$.

   Para ello resultará útil escribir

$$|f(x) - f(2)| = |5x - 10| = |5(x - 2)|$$

   Así, para que $|f(x) - f(2)| < 0.01$, basta que $|x - 2| < 0.01/5$; en otras palabras, si $\delta = 0.01/5$, entonces $|x - 2| < \delta$ implica que $|f(x) - f(2)| < 0.01$.

2. Sean $g(x) = -3x + 1$, $x_0 = 0.1$ y $\varepsilon = 10^{-6}$. Se desea probar la existencia de un número $\delta > 0$ tal que si $|x - 0.1| < \delta$, entonces $|g(x) - g(0.1)| < 10^{-6}$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}|g(x) - g(0.1)| &= |(-3x + 1) - 0.7| \\ &= |-3x + 0.3| = |-3(x - 0.1)| \\ &= |-3|\,|x - 0.1| = 3|x - 0.1|\end{aligned}$$

Por tanto, si $\delta = 10^{-6}/3$, entonces $|x - 0.1| < \delta$ implica que

$$|f(x) - f(0.1)| < \varepsilon$$

Obsérvese que no se ha demostrado que las funciones f y g de los ejemplos anteriores son continuas en los puntos $x_0 = 2$ y $x_0 = 0.1$, respectivamente, pues las relaciones que aparecen en la definición de función continua se probaron para un solo $\varepsilon > 0$ y no para todo $\varepsilon > 0$. A continuación se procede a probar que sí son continuas en $\mathbb{R}$; más aún, se prueba que cualquier función lineal es continua en $\mathbb{R}$.

Demostración Supóngase que $f(x) = ax + b$ es la función lineal considerada.

Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)| = |a|\,|x - x_0| < (|a| + 1)\,|x - x_0|$$

(La última desigualdad se incluye en previsión de que $a = 0$.) Por consiguiente, si hacemos $\delta = \varepsilon/(|a| + 1)$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$.

FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS

Como se mencionó en el capítulo 2, existen funciones definidas para todos los puntos de cierto intervalo y sólo para esos puntos. Por otro lado, al principio del presente capítulo vimos que una función puede estar definida para todo número real, pero sólo interpretar a cierto movimiento cuando la variable toma valores en un intervalo con extremos finitos; y por consiguiente, puede interesarnos exclusivamente su comportamiento en dicho intervalo.

Por ambos hechos, es importante no restringir nuestro estudio de las propiedades de las funciones a sólo aquellas cuyo dominio sea $\mathbb{R}$, sino, por el contrario, extenderlo a las definidas* en intervalos, con la ventaja de que éstas incluyen como caso particular a las primeras; si se recuerda que $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, el primer paso en este sentido será establecer cuándo una función definida en un intervalo abierto es continua en un punto del mismo.

* Se dice que f está definida en un conjunto A si $A \subset \operatorname{dom} f$.

DEFINICION 3.4 *Sea f una función definida en un intervalo abierto. $I \cdot f$ es continua en un punto x_0 de I si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in I$ y $|x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

La definición de cuándo una función f es continua en un punto x_0 de su dominio se obtiene reemplazando en la definición anterior a I por $\operatorname{dom} f$; la definición resultante difiere de la 3.2b al hacerse hincapié en que tanto x_0 como los puntos x deben pertenecer a $\operatorname{dom} f$. La necesidad de imponer esta condición es evidente, pues f sólo está definida para los puntos de $\operatorname{dom} f$; así, los símbolos $f(x_0)$ y $f(x)$ tienen sentido en tanto que x y x_0 pertenezcan a $\operatorname{dom} f$.

DEFINICION 3.5 *Sea f una función definida en un intervalo I, con extremo izquierdo a y extremo derecho b (si I es abierto se pedirá que $a < b$; en los otros casos, $a \leqslant b$). f* es continua en *I:*

1) *si es continua en cada punto de (a, b) (Definición 3.4);*
2) *en el caso de que $a \in I$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $x \in I$ y $|x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$;*
3) *en el caso de que $b \in I$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $x \in I$ y $|x - b| < \delta$ implica que $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$.*

Si el dominio de una función f es una unión de intervalos abiertos, entonces puede demostrarse que f es continua en su dominio si es continua en cada uno de esos intervalos.

De la definición 3.5 resulta claro que si una función es continua en $\mathbb{R}$, entonces es continua en cada intervalo.

EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS

A) Por lo dicho al final de la sección anterior, toda función lineal es continua en cualquier intervalo.

B) La función

$$f(x) = 1/x,$$

es continua en su dominio, es decir, en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Antes de probar esta afirmación se harán algunos comentarios y se demostrará un lema que será de utilidad.

COMENTARIOS Sean $f:I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto, y $x_0 \in I$. Si por algún procedimiento logra probarse que existe $M > 0$ tal que para todo $x \in I$, se tiene que

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant M|x - x_0|, \qquad [3.2]$$

entonces es claro que para cada $\varepsilon > 0$ se cumple que $|x - x_0| < \delta$, y $x \in I$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, donde

$$\delta = \varepsilon/M \qquad [3.3]$$

En general, desafortunadamente, la relación [3.2] no se presenta en forma natural, sino que es más frecuente tener la relación siguiente:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |g(x)|\,|x - x_0|, \qquad [3.2']$$

donde g es una función.

Obsérvese que, como δ es una constante, no puede escribirse $\delta = \varepsilon/|g(x)|$ para obtener [3.3], dado que $g(x)$ puede variar con x y δ podría ser una función no constante de x. Por tanto, se busca una constante $M > 0$ tal que $g(x) \leqslant M$ para todo $x \in I$; así llegaríamos a la situación señalada al principio de este análisis. Sin embargo, esto tampoco es posible en general, pero, en algunos casos, puede procederse de la manera siguiente.

Dado $\varepsilon > 0$ y si suponemos que se cumple [3.2′], se busca un $\delta_0 > 0$ y una $M > 0$ tales que si $|x - x_0| < \delta_0$ y $x \in I$, entonces $|g(x)| \leqslant M$, con lo que se tendrá, si $|x - x_0| < \delta_0$ y $x \in I$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant M|x - x_0| \qquad [3.4]$$

Nótese que la relación [3.2] no se cumple necesariamente para todo $x \in I$, sino sólo para aquellos con cierta vecindad de x_0; esto deberá tenerse en cuenta en lo que resta de la resolución del problema.

Así, si se escoge $0 < \delta < \delta_0$ y $\delta < \varepsilon/M$, se concluye que $|x - x_0| < \delta$ y $x \in I$ implica que $|x - x_0| < \delta_0$ y $x \in I$ y por consiguiente,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant M|x - x_0|$$

Así mismo, si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in I$, entonces $|x - x_0| < \varepsilon/M$ y $x \in I$.

Por tanto, $|x - x_0| < \delta$ y $x \in I$ implica que

$$M|x - x_0| < \varepsilon \qquad [3.5]$$

En resumen, si $|x - x_0| < \delta$, $x \in I$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad [3.6]$$

En otras palabras, para los puntos de cierta vecindad se tiene la propiedad [3.4], y para los de otra, [3.5]; por tanto, para cualquier vecindad contenida en ambas, se tienen las dos propiedades [3.4] y [3.5], simultáneamente, lo que lleva a la relación [3.6]. Tomar una vecindad de x_0 contenida en dos vecindades de x_0 de radios δ_0 y δ_1, respectivamente, equivale a tomar

un radio $\delta > 0$ más pequeño o igual que el menor de los radios; es decir, en símbolos, $0 < \delta \leqslant \text{mín}\{\delta_0, \delta_1\}$.

Por ejemplo, sean $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$ y $\varepsilon = \frac{1}{3}$ (Fig. 3.10).

$$|f(x) - f(x_0)| = |x + 1|\,|x - 1|$$

Si $|x - 1| < \frac{1}{2}$, entonces $|x + 1| < 3$ (Fig. 3.11).

Así, $|x - 1| < \frac{1}{2}$ implica que $|x^2 - 1^2| < 3|x - 1|$.

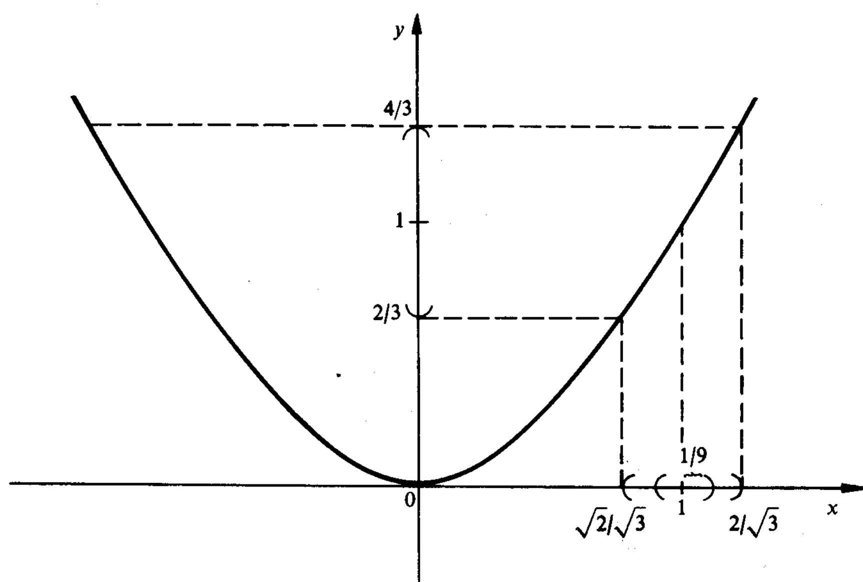


Figura 3.10

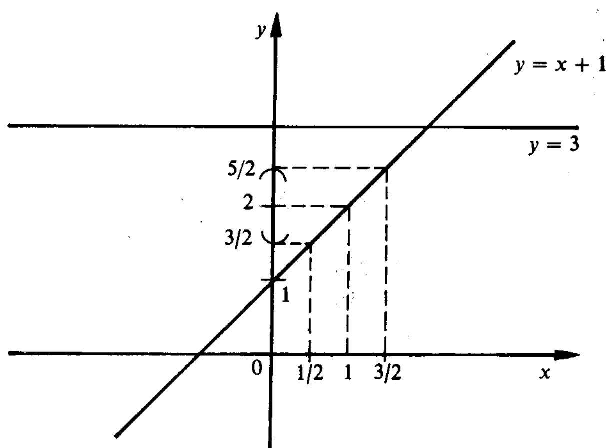


Figura 3.11

Por otra parte, si $|x - 1| < \frac{1}{9}$, entonces $3|x - 1| < \frac{1}{3}$; por tanto, $|x - 1| < \frac{1}{9}$ implica que $|x^2 - 1^2| < 3|x - 1| < \frac{1}{3}$.

Obsérvese que $\frac{1}{9} = \text{mín}\,(\frac{1}{2}, \frac{1}{9})$.

LEMA 3.1 Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in A$. Para cada $\varepsilon_0 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$ implica que

$$|f(x_0)| - \varepsilon_0 < |f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon_0$$

Demostración

Por ser f continua en x_0, para $\varepsilon_0 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$, y $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$.

Por la desigualdad del triángulo, se tiene

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)|$$

y

$$|f(x_0)| - |f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_0)|,$$

para todo $x \in A$.

Por tanto, $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$ implica que

$$|f(x_0)| - \varepsilon_0 < |f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon_0$$

Demostración de la continuidad de $f(x) = 1/x$ en $\mathbb{R} - \{0\}$

Si suponemos que $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, más aún, que $x_0 \in (0, \infty)$, entonces es necesario probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (0, \infty)$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $|1/x - 1/x_0| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|}$$

para todo $x \in (0, \infty)$.

Por el lema anterior, para $\varepsilon = |x_0|/2$ y f igual a la identidad, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $x \in (0, \infty)$ y $|x - x_0| < \delta_0$, entonces $|x_0| - (|x_0|/2) < |x| < |x_0| + (|x_0|/2)$. Así, $x \in (0, \infty)$ y $|x - x_0| < \delta_0$ implica que $(1/|x|) < (2/|x_0|)$. Nótese que $2/|x_0|^2$ es una constante positiva M; por tanto, a partir de los comentarios concluimos que si $0 < \delta \leqslant \text{mín}\,\{\delta_0, \varepsilon/M\}$, entonces $x \in (0, \infty)$, y $|x - x_0| < \delta$ implica que $|1/x - 1/x_0| < \varepsilon$. Si $x_0 \in (-\infty, 0)$, se procede de la misma manera.

C) La función $f(x) = 5x^3 - x$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

Para ejemplificar el proceso en general, se procederá a probar que tal función es continua en un punto en particular; a saber, $x_0 = 2$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} 5x^3 - x &= 5(x-2)^3 - x + 30x^2 - 60x + 40 \\ &= 5(x-2)^3 + 30x^2 - 61x + 40 \\ &= 5(x-2)^3 + 30(x-2)^2 + 59x - 80 \\ &= 5(x-2)^3 + 30(x-2)^2 + 59(x-2) - 80 + 118 \\ &= 5(x-2)^3 + 30(x-2)^2 + 59(x-2) + 38 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |5x^3 - x - 38| \\ &= |5(x-2)^3 + 30(x-2)^2 + 59(x-2)| \\ &= |5(x-2)^2 + 30(x-2) + 59|\,|x-2| \end{aligned}$$

De acuerdo con los comentarios anteriores, si $|x-2| < 1$, entonces

$$|f(x) - f(2)| \leqslant 94|x-2|$$

Así, para cada $\varepsilon > 0$, tenemos $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ si $|x-2| < \delta$, donde

$$\delta = \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{94}\right)$$

En general, para probar la continuidad de f en cualquier punto x_0, se procede del mismo modo, sustituyendo el número 2 por x_0.

Operaciones entre funciones continuas

Aquí se proporciona un teorema que permitirá determinar la continuidad de funciones obtenidas de otras más elementales mediante sumas, diferencias, productos y cocientes.

TEOREMA 3.1 Sean f y g funciones definidas en el intervalo abierto I. Si f y g son continuas en $x_0 \in I$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $f + g$ 2) cf 3) f^2 4) fg, son continuas en x_0.

Si además $g(x_0) \neq 0$, entonces:

5) $1/g$ 6) f/g; son continuas en x_0.

Demostración

1) Sea $\varepsilon > 0$, por ser f y g continuas en x_0, entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

(a) $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ si $|x - x_0| < \delta_1$ y $x \in I$

(b) $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$ si $|x - x_0| < \delta_2$ y $x \in I$

Si se elige $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $|x - x_0| < \delta$, y $x \in I$ implica que $|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ (por la desigualdad del triángulo).

2) La prueba se deja al lector como ejercicio.

3) Sean $x_0 \in I$ y $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in I$ se tiene

$$|f^2(x) - f^2(x_0)| = |f(x) + f(x_0)|\,|f(x) - f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant (|f(x)| + |f(x_0)|)(|f(x) - f(x_0)|)$$

Por el lema anterior, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x)| < |f(x_0)| + 1$ si $|x - x_0| < \delta_1$ y $x \in I$.

Así, si $|x - x_0| < \delta_1$ y $x \in I$, entonces $|f^2(x) - f^2(x_0)| < M|f(x) - f(x_0)|$, donde $M = 2|f(x_0)| + 1$.

Como f es continua en x_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta_2$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/M$.

Por último, si $\delta = \text{mín}\,(\delta_1, \delta_2)$, entonces $|x - x_0| < \delta$ y $x \in I$ implica que $|f^2(x) - f^2(x_0)| < \varepsilon$.

4) Obsérvese que para todo $x \in I$ se tiene

$$f(x)g(x) = \tfrac{1}{4}\big((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2\big)$$

Por los incisos anteriores, resulta que fg es continua en x_0.

Para demostrar las dos últimas afirmaciones enunciadas en el teorema se requiere el lema 3.1.

Si aplicamos el lema 3.1 cuando ε_0 es igual a $|g(x_0)|/2$, con $g(x_0) \neq 0$, entonces concluimos que existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta_1$, $x \in I$ implica que $|g(x)| > |g(x_0)| - \varepsilon_0$.

Por consiguiente, $|x - x_0| < \delta_1$ y $x \in I$ implica que $|g(x)| > 0$ (o sea, $g(x) \neq 0$).

Así, $1/g$ está definida en un intervalo abierto I_0, que contiene a x_0.

5) Supongamos que $g(x_0) \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$; por lo anterior, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta_1$, y $x \in I_0$ implica que $|g(x)| > |g(x_0)|/2$.

Así,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)|\,|g(x_0)|} \leqslant 2\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x_0)|^2}$$

si $|x - x_0| < \delta_1$ y $x \in I_0$.

Por ser g continua en x_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta_2$, y $x \in I_0$ implica que $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon(|g(x_0)|^2/2)$.

De donde, si $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $|x - x_0| < \delta$, y $x \in I_0$ implica que $|1/g(x) - 1/g(x_0)| < \varepsilon$.

6) Combinando 4) y 5) se sigue el resultado.

Familias de funciones continuas

En las secciones anteriores de este capítulo se probó que toda función lineal es continua en $\mathbb{R}$.

En esta sección se dan ejemplos de otras familias de funciones, en las cuales cada uno de sus elementos es una función continua en su dominio.

Familia de las funciones x^n donde n es un entero

A partir del inciso 3) del teorema 3.1, se tiene que las funciones $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, ..., son continuas en $\mathbb{R}$.

Por consiguiente, de 5) se sigue que las funciones $1/x^2$, $1/x^3$, ..., son continuas en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En general, puede demostrarse, de forma inductiva, el teorema siguiente:

TEOREMA 3.2 Toda función x^n, con n entero, es continua en su dominio.

Familia de funciones polinomiales

Del teorema anterior y del teorema 3.1, se tiene el teorema siguiente:

TEOREMA 3.3 Cada función polinomial, es decir, cada función del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad n \geqslant 0$$

es continua en $\mathbb{R}$.

EJEMPLOS Las funciones
(a) $f(x) = x^3 + 4$;
(b) $f(x) = 5x^4 + 2x^2$;
(c) $f(x) = x^6 - 4x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 2$;
son continuas en $\mathbb{R}$.

Familia de funciones racionales

A partir del inciso 6) del teorema 3.1 y de que toda función polinomial es continua en $\mathbb{R}$, puede demostrarse el teorema siguiente:

TEOREMA 3.4 Toda función racional, es decir, toda función del tipo

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son polinomios, es continua en su dominio, o sea, en todo punto x donde $Q(x) \neq 0$.

EJEMPLOS

(a) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 5}$ es continua para todo $x \neq -5$.

(b) $f(x) = \dfrac{12x^6 + 13x^5 - 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ es continua en $\mathbb{R} - \{3, -2, 1\}$.

(c) $\dfrac{x^3}{x^2 - \dfrac{5x}{2} - \dfrac{3}{2}}$ es continua en $\mathbb{R} - \{3, -\tfrac{1}{2}\}$.

Gráficas continuas. Límites laterales

De manera intuitiva, puede decirse que la gráfica de una función definida en un intervalo I, es continua en ese intervalo si no se rompe en I, o, en otras palabras, si podemos trazarla sobre I sin separar el lápiz del papel (Fig. 3.12). En caso contrario, se dice que la gráfica es discontinua (Fig. 3.13).

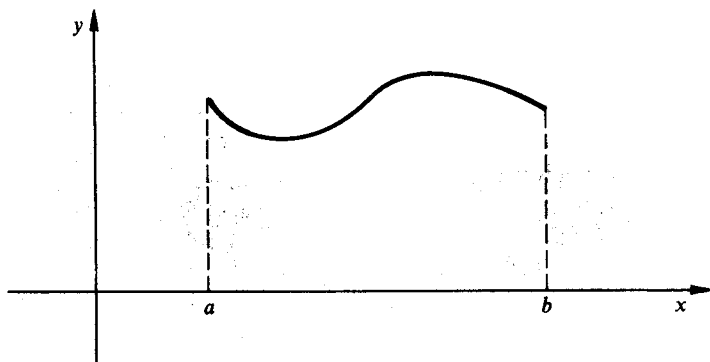
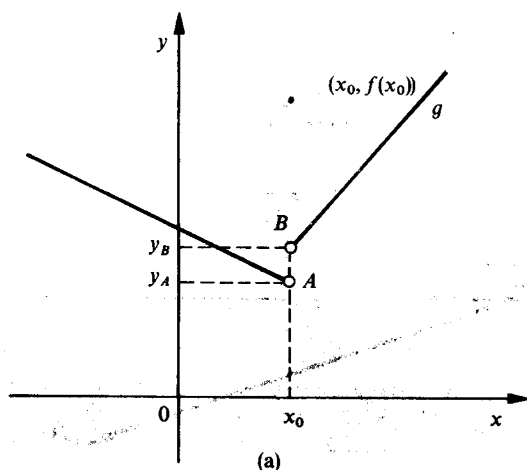


Figura 3.12

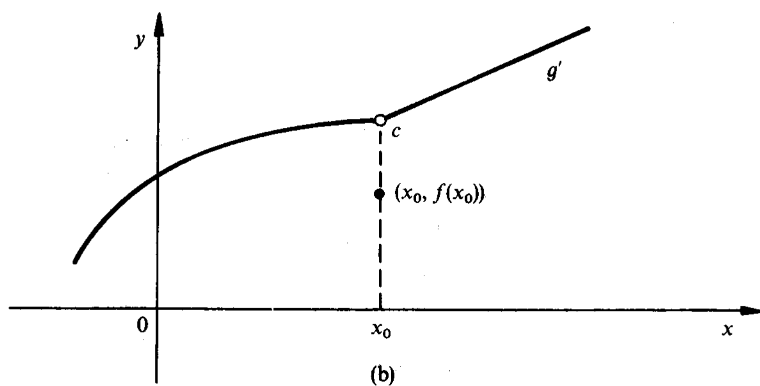
En la figura 3.13(a), se observa que al aproximarnos por la izquierda a x_0, los puntos correspondientes en la gráfica de g se aproximan a A en forma análoga; al aproximarnos por la derecha a x_0, los puntos correspondientes en la gráfica de g se aproximan a B; es decir, si Y_A e Y_B son coordenadas de A y B, respectivamente, entonces

$$g(x) \cong Y_A \text{ para todo } x < x_0 \text{ y suficientemente próximo a } x_0 \qquad [3.7]$$

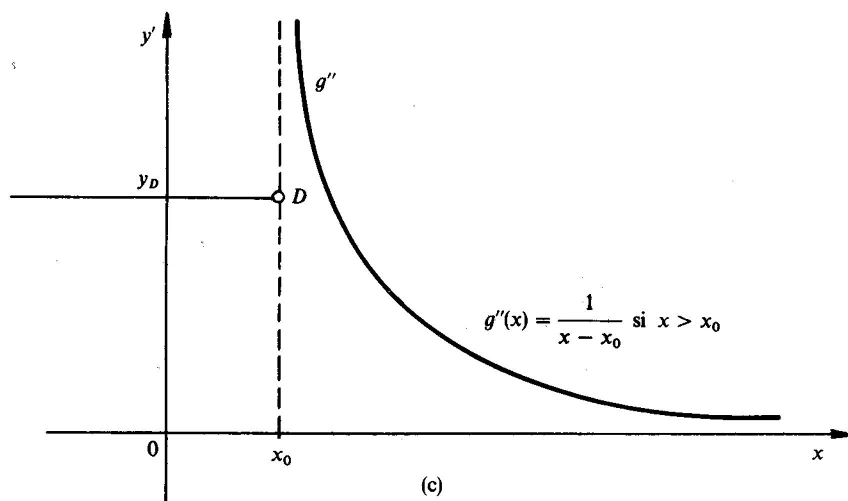
$$g(x) \cong Y_B \text{ para todo } x_0 < x \text{ y suficientemente próximo a } x_0 \qquad [3.8]$$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.13

Lo anterior sugiere la definición siguiente:

DEFINICION 3.6 *Sea f una función definida en cada punto de $(a, b]$, excepto, quizás, en x_0. Un número α es el límite de f por la izquierda en x_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < x_0 - x < \delta$, y $x \in (a, b]$ implica que $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$* (Fig. 3.14).

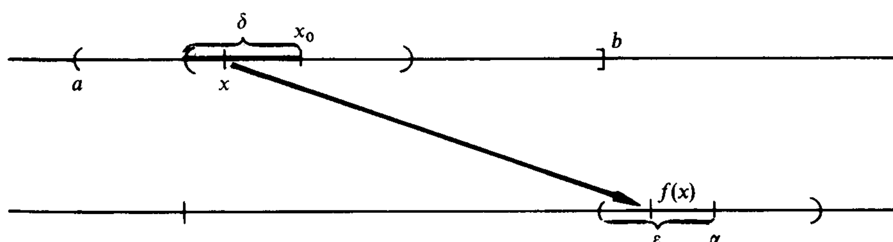


Figura 3.14

Si α es el límite por la izquierda de f en x_0, entonces escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha, \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \alpha$$

DEFINICION 3.7 *Sea f una función definida en un intervalo $[a, b)$, excepto, quizás, en x_0. Un número β es el límite de f por la derecha en x_0 si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < x - x_0 < \delta$, y $x \in [a, b)$ implica que $|f(x) - \beta| < \varepsilon$* (Fig. 3.15).

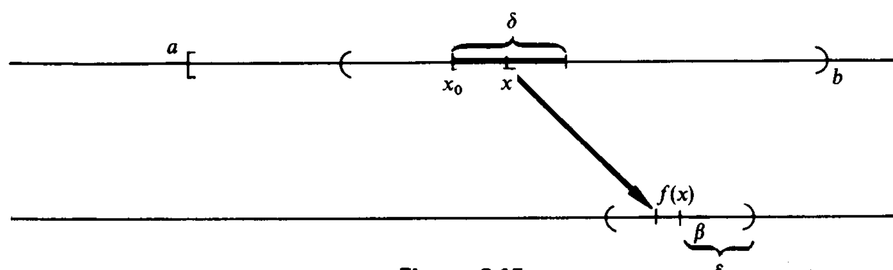


Figura 3.15

Si β es el límite de f por la derecha en x_0, se escribe

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta, \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 < x}} f(x) = \beta$$

Con esta nueva terminología, las relaciones [3.7] y [3.8] pueden escribirse así:

$$\lim_{x\to x_0^-} g(x) = Y_A$$

$$\lim_{x\to x_0^+} g(x) = Y_B$$

En forma similar, si el punto C de la figura 3.13(b) tiene por ordenada a Y_C, entonces

$$\lim_{x\to x_0^-} g'(x) = Y_C \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to x_0^+} g'(x) = Y_C.$$

En el caso de la figura 3.13(c), $\lim\limits_{x\to x_0^-} g''(x) = Y_D$; sin embargo, el límite de g'' por la derecha en x_0 no existe, como se probará más adelante.

Por último, para la función f de la figura 3.12, se tiene que para cada punto $x_0 \in (a, b)$ se cumple lo siguiente:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Esto sucede también con las funciones g, g' y g'' en los puntos donde sus gráficas no se rompen. Así, podemos establecer la definición siguiente:

DEFINICION 3.8 *Sean a y b los extremos izquierdo y derecho, respectivamente, de un intervalo I. La gráfica de una función f definida en I es continua en ese intervalo si:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ *para todo* $x_0 \in (a, b)$.
2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$; *en caso de que a pertenezca a I.*
3) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$; *en caso de que b pertenezca a I.*

En el capítulo siguiente se prueba que las condiciones 1) de las definiciones 3.5 y 3.8 son equivalentes. Por ahora, aceptamos la validez de esta afirmación.

Por otra parte, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ significa, según la definición 3.7, que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $0 < x - a < \delta$ y $x \in I$ implica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$; pero como la última desigualdad se satisface aun cuando $x = a$, concluimos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad |x - a| < \delta \qquad \text{y} \qquad x \in I$$

Es decir, las condiciones 2) de las definiciones 3.5 y 3.8 son, también, equivalentes; y lo mismo puede probarse para las condiciones 3) de dichas definiciones.

Los hechos anteriores cabe resumirlos en la proposición siguiente:

PROPOSICION 3.1 Una función definida en un intervalo I es continua en I si, y sólo si, su gráfica es continua en ese intervalo.

De lo natural que resulta llamar gráfica continua a toda aquella que no se rompe y a partir de la última proposición, puede encontrarse apropiado haber asignado a ciertas funciones el calificativo de continuas.

Recuérdese que una función, cuyo dominio sea una unión de intervalos abiertos, es continua en su dominio si lo es en cada uno de estos intervalos. De la proposición anterior se sigue que cualquiera de tales funciones es continua en su dominio si, y sólo si, en cada uno de los intervalos su gráfica es continua (no se rompe). En particular: *las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.*

La proposición 3.1 también permite intuir geométricamente el *teorema del valor intermedio**. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si c es un número real entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$ (Fig. 3.16).

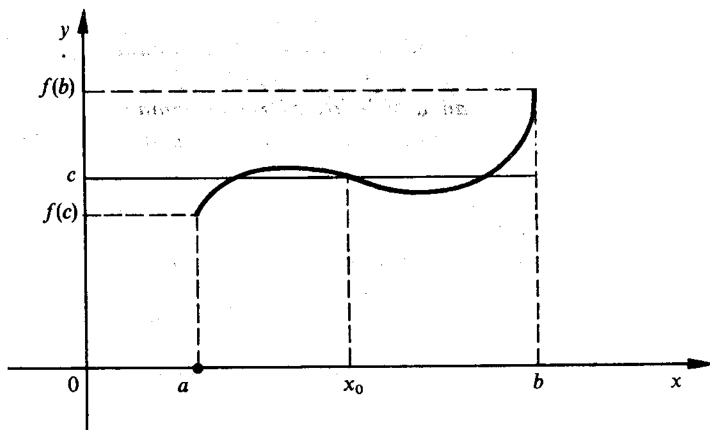


Fig. 3.16 Como f es continua en $[a, b]$, su gráfica no se rompe. Por tanto, la gráfica de f corta a la recta $y = c$. Se infiere entonces que existe $x_0 \in (a, b)$, tal que $f(x_0) = c$. En efecto, en este caso existen tres puntos con esa propiedad.

El resultado siguiente es consecuencia de la proposición 3.1.

TEOREMA 3.5 Una función definida en un intervalo abierto I es discontinua en $x_0 \in I$ si se da alguno de los casos siguientes:

1. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 < x}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

---

* La prueba de este teorema aparece en el capítulo 8, que estudia las sucesiones y series.

Por ejemplo, la función g. [Véase Fig. 3.13(a).]

2. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 < x}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \neq f(x_0)$.

Por ejemplo, la función g'. [Véase Fig. 3.13(b).]

3. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 < x}} f(x)$ no existe, o bien $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ no existe.

Por ejemplo, la función g''. [Véase Fig. 3.13(c).]

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. Pruébese que $\sqrt[3]{x}$ es continua en los puntos de su dominio.
Solución Obsérvese que

$$x - a = (x^{1/3} - a^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})$$

Por lo que

$$|x^{1/3} - a^{1/3}| = \frac{|x - a|}{|x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3}|}$$

Sea $a \neq 0$. $|x - a| < |a|/2$ implica que a y x tienen el mismo signo. Por tanto,

$$x^{1/3}a^{1/3} > 0 \qquad \text{si} \qquad |x - a| < \frac{|a|}{2}$$

Así,

$$|x^{1/3} - a^{1/3}| \leq \frac{1}{a^{2/3}}|x - a|, \qquad \text{si} \qquad |x - a| < \frac{|a|}{2};$$

y por los comentarios de la página 94, se concluye que la función es continua en $a \neq 0$. Cuando $a = 0$, tómese $\delta = \varepsilon^3$.

2. Pruébese que $\operatorname{sen} x$ es continua en los puntos de su dominio.
Solución Cuando se vea el teorema del valor medio para derivadas, se probará que

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \tag{3.9}$$

Así, la función $\operatorname{sen} x$ es continua en el cero.
Si usamos [3.9] y la igualdad siguiente, se probará que la función es continua en todos los demás reales.

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \cos \tfrac{1}{2}(x + a) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x - a)$$

Por tanto,

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 2\,|\cos\tfrac{1}{2}(x + a)|\,|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(x - a)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\,|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(x - a)| \leqslant 2(\tfrac{1}{2}\,|x - a|) = |x - a|,$$

de donde se infiere nuestra afirmación.

3. Pruébese que la función $\tan x^2$ es continua en todos los puntos a de su dominio, es decir, para $a \neq \sqrt{(2n + 1)\pi/2}$, para todo entero n mayor o igual que cero.
Solución Sea $\varepsilon > 0$. Como la función tangente es continua en $b = a^2$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$|\tan y - \tan b| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad |y - b| < \varepsilon_1 \qquad \text{e} \qquad y \in \operatorname{dom} \tan$$

Así mismo, la función $y = x^2$ es continua en a, por lo que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon_1, \qquad \text{si} \qquad |x - a| < \delta$$

Por lo que, finalmente,

$$|\tan x^2 - \tan a^2| < \varepsilon_1 \qquad \text{si} \qquad |x - a| < \delta \qquad \text{y} \qquad x \in \operatorname{dom} \tan x^2$$

4. Pruébese que la función $[x]$ (el mayor entero menor o igual que x) *no* es continua en los números enteros.
Solución Se probará que si a es un entero, entonces para $\varepsilon = 1$ no existe $\delta > 0$ tal que

$$|[x] - [a]| = |[x] - a| < 1, \qquad \text{si} \qquad |x - a| < \delta$$

Sea $\delta > 0$. El número real $x = a - \delta/2$ satisface $|x - a| < \delta$ y, por otra parte, como $[x] = a - 1$, entonces

$$|[x] - a| = a - [x] = a - (a - 1) = 1$$

•

(Véase Ejercicio 3.5, de este capítulo.)

5. Determínese la constante c de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant \frac{1}{2} \\ c - x^2 & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

sea continua en $\frac{1}{2}$.
Solución Como se señaló en la página 103, después de la definición 3.8, una función definida en (a, b) es continua en x_0, con $x_0 \in (a, b)$, si, y sólo si,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Por tanto, debe buscarse un valor c para el cual se cumpla

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}$$

Sean $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = c - x^2$. Tanto f_1 como f_2 son continuas en $\frac{1}{2}$. Así,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f_1(x) = f_1(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4},$$

y

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f_2(x) = f_2(\tfrac{1}{2}) = c - \tfrac{1}{4}$$

Por la definición de f, es claro que

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f_1(x) = \tfrac{1}{4}$$

y

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f_2(x) = c - \tfrac{1}{4}$$

Por tanto, el valor de c buscado debe satisfacer

$$c - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$

de donde

$$c = \tfrac{1}{2}$$

6. Pruébese que la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

no es continua en $x = 0$.
Solución Sea $0 < \varepsilon < 1$, consideremos $\delta > 0$ arbitraria. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n > 1/\delta$, ya que $\pi > 1$ se tiene que $2n\pi > 1/\delta$.
Por tanto, si $x = 1/2n\pi$, entonces $0 < x < \delta$; así, $|x - 0| < \delta$ y

$$\left|\cos\frac{1}{x} - 0\right| = |\cos 2n\pi| = 1 > \varepsilon$$

Por tanto, $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

7. Pruébese que la función

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución Si $x \neq 0$, entonces $g(x)$ coincide en una vecindad de x con el producto de dos funciones continuas, por tanto, es continua en x.

Ahora, si $x = 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon$. Así, si $x \neq 0$ y $|x - 0| < \delta = \varepsilon$, entonces

$$|g(x) - 0| = |x \operatorname{sen} 1/x| \leqslant |x| < \varepsilon \qquad \text{ya que} \qquad |\operatorname{sen} 1/x| \leqslant 1$$

Por otra parte, $|g(x) - 0| = 0 < \varepsilon$, si $x = 0$. Por tanto, $g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

EJERCICIOS

3.1 Dados los números x_0 y $\varepsilon > 0$, determínese $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, si $|x - x_0| < \delta$, para las funciones siguientes:

a) $f(x) = 1 - 2x$, $x_0 = 2$ y $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.0012$, $\varepsilon = 0.00014$
b) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 = 3$, $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.0012$
c) $h(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.02$, $\varepsilon = 0.0003$
d) $h(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 3$, $\varepsilon = 0.5$
e) $f(x) = x^2 - x$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.5$

3.2 Usando directamente la definición de función continua, demuéstrese que las funciones siguientes son continuas en el punto indicado.

a) $f(x) = 3x - 5$ en $x_0 = 1$
b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}$ en $x_0 = -1$
c) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ en $x_0 = 0$
d) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3x}$ en $x_0 = 2$
e) $h(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 2}$ en $x_0 = -1$
f) $k(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$ en $x_0 = 1$
g) $f(x) = 1/kx$ en $x_0 = 1$, $k \neq 0$
h) $g(x) = [x]$ en $x_0 = 0.75$
i) $h(x) = |x - 3|$ en $x_0 = \frac{1}{2}$
j) $\sqrt{2x - 5}$ en $x = 3$ [*Sugerencia:* Véase el Ejemplo ilustrativo 1 de la página 105.]

3.3 Pruébese, a partir de la definición, que $\cos x$ es continua en $\mathbb{R}$, usando una fórmula similar a la empleada para el seno en el ejemplo ilustrativo 2 de este capítulo.

3.4 Utilizando resultados de este capítulo, dígase en dónde son continuas las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 7}}{x + 3}(x^3 - 2x + 1)$
b) $g(x) = (\operatorname{sen} x)\left(|x| + \dfrac{x^7 - 2}{x^2}\right)$
c) $u(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/3)$
d) $v(x) = \cos^2 x$
e) $h(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$
f) $g(x) = \tan^2 x - \sec^2 x$
g) $f(x) = \tan x$
h) $u(x) = \sec x$

3.5 En términos de ε, δ, establézcase cuándo una función $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ no es continua en $x_0 \in [a, b]$.

3.6 Basándonos en los términos empleados en el ejemplo ilustrativo 3 de este capítulo, pruébese que las funciones siguientes son continuas.

a) $u(x) = \operatorname{sen}(x+1)^2$ b) $v(x) = \cos x^3$

c) $f(x) = \tan x^3$ d) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

e) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ f) $z(x) = \operatorname{sen} 1/x$

3.7 Determínese si las funciones siguientes son continuas en donde se indica.

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \end{cases}$; en $x_0 = 1$

b) $h(x) = \begin{cases} |x|/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$; en $x_0 = 0$

c) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ -\sqrt{1 - (x-2)^2} & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$; en $x_0 = 1$

d) $k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in (a, b] \\ g(x) & \text{si} \quad x \in [b, c) \end{cases}$

[donde $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en b]; en $x_0 = b$.

3.8 Se dice que una función f es de *Lipschitz* si existe un número $M > 0$ tal que para dos puntos x, y arbitrarios tenemos

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

Pruébese que toda función de Lipschitz es continua.

3.9 ¿Es cierto que si $|f|$ es continua entonces f es continua?

3.10 Sea f una función continua en $[a, b]$; supóngase que $f(a) < 0$ y que $f(b) > 0$. Pruébese que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

3.11 Pruébese que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ x & \text{si } x \text{ es racional,} \end{cases}$$

es continua en cero.

3.12 Supóngase que f es continua en cero y que $f(0) = 0$ y que $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que $g(x)$ es continua en 0.

3.13 Sea $f:(a, b) \to \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in (a, b)$. Pruébese que si $f(x_0) > 0$, entonces existe una vecindad de x_0 en donde f es positiva.

3.14 Pruébese que la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \text{ es racional} \\ 1 & , \quad x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

es discontinua en todo $\mathbb{R}$. [*Nota:* En todo intervalo abierto hay números racionales y números irracionales.]

3.15 ¿Es cierto que

a) $f(x) < 3$ «cerca» de 3 si $f(x) = \sqrt{x + 1}$?

b) $f(x) < a$ «cerca» de 0, donde a es fijo y mayor que 1 si $f(x) = x^2 + 1$?

3.16 Véase si en los incisos siguientes se cumple el teorema del valor intermedio:
a) $f(x) = x^3$ en $[-1, 1]$ b) $g(x) = x^3$ en $[0, 2]$
c) $h(x) = x^2 + 4x + 4$ en $[0, 1]$

3.17 Pruébese que la ecuación

$$x^3 + 7x^2 - 3x - 5 = 0,$$

tiene una raíz entre -3 y 0.

3.18 Pruébese que hay algún número x que satisface la ecuación $\operatorname{sen} x = x + 1$. (*Sugerencia:* Aplíquese el teorema del valor intermedio a $f(x) = \operatorname{sen} x - x - 1$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.)

René Descartes
(1596 a 1650)

Nacido en La Haya, Touraine, se le conoce como el padre de la filosofía moderna. La geometría analítica que fundamentó se considera un «parteaguas» en el desarrollo de las matemáticas.

Fue un niño de inteligencia excepcional. Con los jesuitas del Colegio Real de la Flèche, recibió una educación fundamental en su formación que generaría en él, al cabo de 10 años, dudas e incertidumbre. Durante su servicio en el ejército del Príncipe de Orange, conoció a Isaac Beckman, quien le comunicó los descubrimientos más recientes del conocimiento matemático.

Vivió en Holanda de 1628 a 1649 y allí escribió los trabajos que le hicieron famoso. Entre ellos, cabe destacar: El discurso del método, *1637, donde presentó su nuevo método de naturaleza matemática;* Las meditaciones, *1641, en el que desarrolló la doctrina metafísica del Discurso;* Principios de filosofía, *1634, donde intentó dar una presentación lógica de todos los fenómenos naturales dentro de un sistema simple de principios mecánicos;* Tratado de las pasiones, *1649, en el que esbozó sus principios éticos.*

Cabe hacer notar que, gracias a la geometría analítica de Descartes; Newton y Leibniz pudieron fundamentar el cálculo diferencial e integral.

En forma paralela a la vida de Descartes, se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Corneille: *El Cid*, 1636; *Horace, Cinna*, 1641.
Inca Garcilaso: *Comentarios reales I*, 1609.
Góngora: *Soledades*, 1631.
Ruiz de Alarcón: *La verdad sospechosa*, 1630.

MUSICA

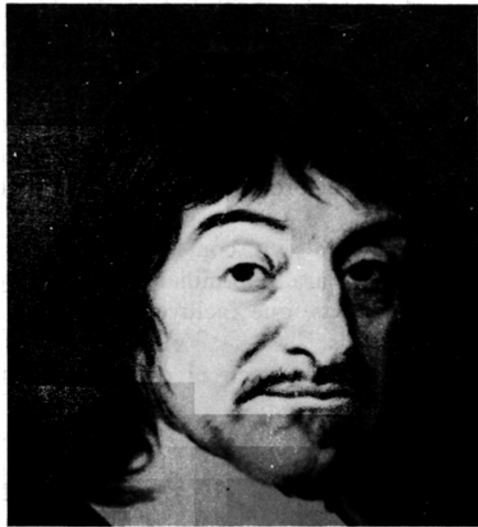
Caccini: *Nuove Musiche*, 1601.
Monteverdi: *El regreso de Ulises*, 1641; *La coronación de Popea*, 1642.
Schutz: *Simphoniae Sacrae*, segunda parte, 1647.

PINTURA

Hernández, Gregorio: *Cristo yacente*, 1614.
Rubens: *Rapto de las hijas de Leucipo*, 1615.
Zurbarán: *Cristo crucificado*, 1627.

CULTURA EN GENERAL

Se construye la Mezquita Azul, Estambul, 1609.
Se construye el Palacio Barberini, Roma, 1628-1633.
Harvey (fisiólogo): *De motu cordis et sanguini*, 1628.



René Descartes

4



LIMITE DE UNA FUNCION

INTRODUCCION

Uno de los problemas que preocupó a los matemáticos desde la época de los antiguos griegos, fue determinar la tangente a una curva en un punto. Para las cónicas, el problema fue resuelto mediante argumentos puramente geométricos.

En el siglo XVII, con la ayuda de la geometría analítica, Fermat encontró un método para determinar la ecuación de las tangentes para una familia amplia de curvas, que incluye las gráficas de las funciones polinomiales y trigonométricas.

Como se verá en el capítulo 5, esto lleva a considerar funciones del tipo

$$h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

donde f también es una función, y a determinar el comportamiento de la función h para valores de x localizados en vecindades pequeñas de a. Obsérvese que cuando f es continua, tanto el numerador como el denominador, en esas vecindades, son muy parecidos a ¡cero!

Al estudiar las funciones continuas en el capítulo anterior, se vio que si una función es continua en un punto, los valores que toma en vecindades pequeñas de a, son muy parecidos al valor que toma en a. Para la función h antes considerada, no tiene sentido hablar del valor de la función en a, pues no está definida ahí. Sin embargo, puede suceder que los valores que toma en puntos próximos a a sean parecidos a cierto número; en otras palabras, es posible que $h(x)$ «tienda a» un valor L cuando x tienda a a (véase Fig. 4.1).

Este tipo de problemas queda englobado dentro del problema general de determinar si cierta función $f(x)$ tiende a un valor cuando x tiende a un valor fijo x_0.

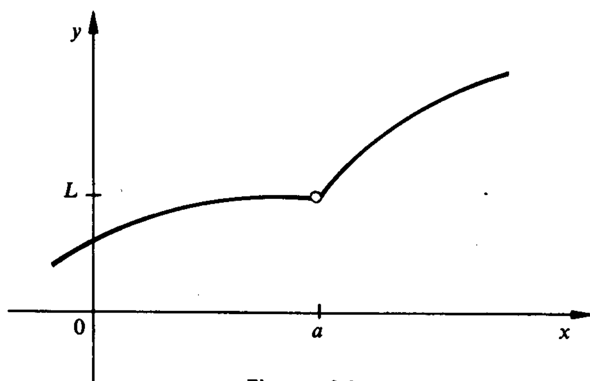


Figura 4.1

DEFINICION DE LIMITE DE UNA FUNCION

Sea f una función definida en un intervalo (a, b), excepto, quizás, en un punto x_0 del mismo.

Supóngase que al aproximarnos a x_0, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores correspondientes de la función se aproximan a un mismo número L (Fig. 4.2). En este caso, se dice que existe el límite de f en x_0 y que este límite es igual a L.

Podemos resumir lo anterior en la definición siguiente:

DEFINICION 4.1 *Sea f una función definida en un intervalo (a, b), excepto, quizás, en un punto x_0 del mismo. El límite de f en x_0 existe, y es igual al número L si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

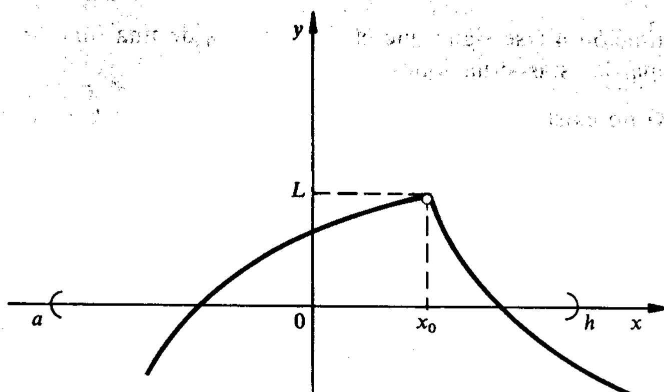


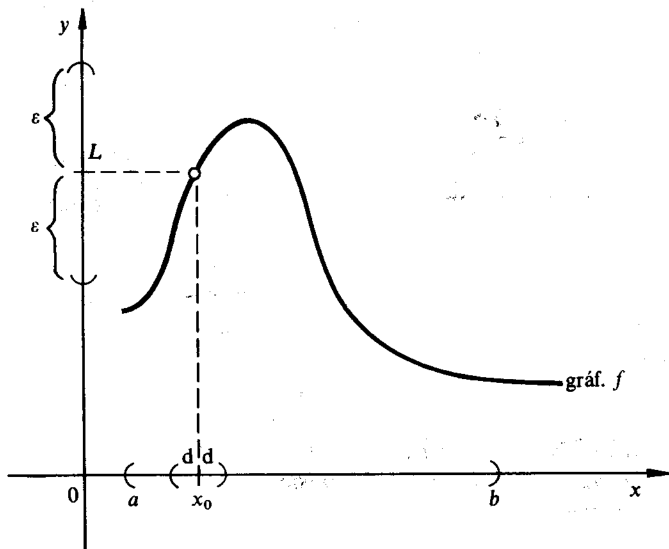
Figura 4.2

En este caso, se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x_0} f = L.$$

A partir de las definiciones de los límites laterales de una función, podemos volver a formular la definición anterior así:

DEFINICION 4.2 *Sea f una función definida en (a, b), excepto, quizás, en x_0. El límite de f en x_0 existe, y es igual a L si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, y $x \in (a, b)$ implica que* $|f(x) - L| < \varepsilon$. (Véase la figura siguiente.)



Interpretación de las relaciones en términos de la gráfica de la función.

De la definición 4.1 se sigue que el límite en x_0 de una función f no existe si se da alguna de estas situaciones:

(1) $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ no existe.

(2) $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ no existe.

(3) $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existen, pero $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Nota En la definición 4.1 se dice que *quizás f* no está definida en x_0, pero de ninguna manera se excluye el caso en que sí lo está. Es decir, es posible también que una función tenga límite en un punto en que sí está definida. Lo anterior se tiene en el segundo de los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

1. Sea f la función cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2},$$

f está definida en $(-\infty, \infty)$, excepto en $x_0 = 2$. La gráfica de f aparece en la figura 4.3. A partir de la gráfica, es claro que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

2. Sea g la función cuya regla de correspondencia es

$$g(x) = x + 2;$$

g está definida en $(-\infty, \infty)$ y su gráfica aparece en la figura 4.4,

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4,$$

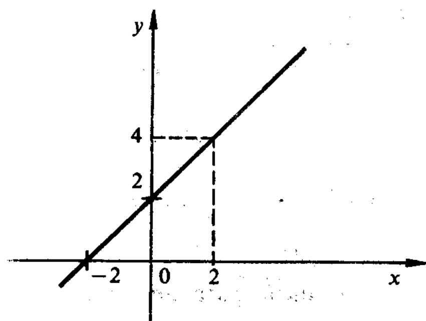


Figura 4.3

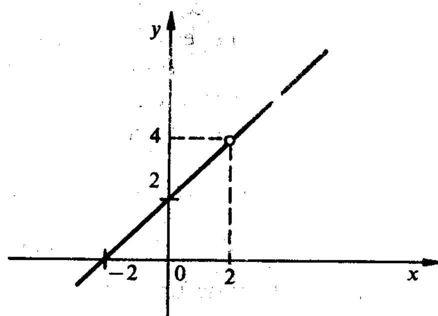


Figura 4.4

pues de la inspección de la gráfica resulta que

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^+} g(x) = 4.$$

3 Sea $h(x) = 1 + [x]$. Su gráfica sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ aparece en la figura 4.5, y de ésta se sigue que $\lim_{x \to 0} h(x)$ no existe, ya que

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$$

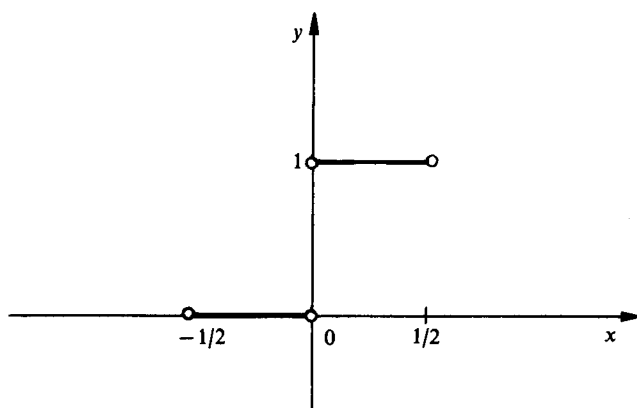


Figura 4.5

Para las funciones f y g de los ejemplos 1 y 2 se tiene

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x) = 4$$

Esto no es casual; se debe a que la existencia y el valor del límite de una función en un punto x_0 no dependen del valor de ésta en el punto (de hecho, la función puede no estar definida en x_0), sino de los valores que toma en puntos próximos a x_0. En el caso que nos ocupa, f y g toman exactamente los mismos valores para todo $x \neq x_0$.

En forma general podemos enunciar la proposición siguiente:

PROPOSICION 4.1 **Sean f y g dos funciones tales que**

$$f(x) = g(x)$$

para todo punto x de un intervalo (a, b), excepto, quizá, para un punto x_0 de ese intervalo. Entonces,

$$\lim_{x_0} f = L \qquad \text{si} \qquad \lim_{x_0} g = L,$$

y a la inversa.

De este resultado se infiere que los límites indicados en la primera columna de la tabla 4.1 existen si, y sólo si, existen los correspondientes de la segunda columna.

Sea f una función definida en un intervalo (a, b), y tomemos un punto x_0 en este intervalo.

En la sección de límites laterales se señaló, aunque sin demostrarse, que f es continua en x_0 si, y sólo si,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

TABLA 4.1

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 1} x+1$
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to 2} x^2+2x+4$
$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^5-3^5}{x-3}$	$\lim\limits_{x\to 3} x^4+3x^3+9x^2+27x+81$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a}$	$\lim\limits_{x\to a} (x-b)(x-c)$

Lo anterior se resume en el teorema siguiente:

TEOREMA 4.1 Sean f una función definida en (a, b) y x_0 un punto de ese intervalo; f es continua en x_0 si, y sólo si,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Demostración

Supóngase que f es continua en x_0. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por ser f continua en x_0 existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \text{ y } x \in (a, b) \text{ implica que } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Por tanto,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ y } x \in (a, b) \text{ implica que } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Así,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

A la inversa, supóngase que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in (a, b)$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pero es claro que

$$|f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Así,

$$|x - x_0| < \delta, \text{ y } x \in (a, b) \text{ implica que } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

En virtud de este teorema, se tienen los resultados siguientes:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 3 \cdot 0 = 0$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} x^3 - 5x + 3 = 1^3 - 5 \cdot 1 + 3 = -1$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{0+3}{0-2} = -\dfrac{3}{2}$

(d) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \pi/2 = 1$

(e) La función g definida como

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{ para todo } x \neq 1 \text{ y } g(1) = 2, \text{ es continua.}$$

En seguida se generalizan estos resultados.

LIMITES DE CIERTOS TIPOS DE FUNCIONES

Como ya se indicó, toda función lineal, polinomial, racional o trigonométrica es continua en cada punto de su dominio. Por tanto, del teorema 4.1 se concluye que si f es una de tales funciones y x_0 es un punto de su dominio, entonces

$$\lim_{x_0} f = f(x_0),$$

es decir,

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (ax + b)$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} (a_n x^n + \cdots + a_0) = a_n x_0^n + \cdots + a_0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} = \dfrac{a_n x_0^n + \cdots + a_0}{b_m x_0^m + \cdots + b_0}$, para todo x_0 tal que:

$$b_m x_0^m + \cdots + b_0 \neq 0$$

4.

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

(c) $\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$, para todo $x_0 \neq (2n + 1)\pi/2$ con n entero.

(d) $\lim_{x \to x_0} \cot x = \cot x_0$, para todo $x_0 \neq n\pi$ con n entero.

(e) $\lim_{x \to x_0} \sec x = \sec x_0$, para todo $x_0 \neq (2n + 1)\pi/2$ con n entero.

(f) $\lim_{x \to x_0} \csc x = \csc x_0$, para todo $x_0 \neq n\pi$ con n entero.

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LIMITES

TEOREMA 4.2 Sea I un intervalo abierto y $x_0 \in I$. Si para cada $x \neq x_0$ se tiene que

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$$

y

$$\lim_{x_0} f(x) = \lim_{x_0} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x_0} g(x) = L$$

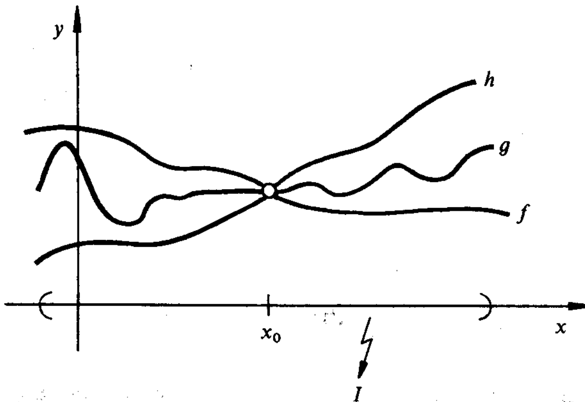


Figura 4.6

Demostración
Sea $x \in I$, $x \neq x_0$, entonces

$$|g(x) - L| = \begin{cases} g(x) - L & \text{si} \quad g(x) - L \geqslant 0 \\ L - g(x) & \text{si} \quad g(x) - L < 0 \end{cases}$$

En el primer caso se tendrá que

$$|g(x) - L| \leqslant h(x) - L \leqslant |h(x) - L|$$

En el segundo caso, se tiene

$$|g(x) - L| \leqslant L - f(x) \leqslant |f(x) - L|$$

Así, para todo $x \in I$, se tiene que

$$|g(x) - L| \leqslant |h(x) - L| + |f(x) - L|$$

Sea $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|h(x) - L| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{y} \quad x \in I,$$

y

$$|f(x) - L| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \text{y} \quad x \in I,$$

por tanto, si $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces se tiene que

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad \text{y} \quad x \in I \quad \text{implica que} \quad |g(x) - L| < \varepsilon$$

TEOREMA 4.3 Sea f una función definida en un intervalo abierto I, excepto, quizás, en x_0. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $L \neq 0$, entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_0$, y $x \in I$ implica que $f(x) \neq 0$, (más aún, $f(x)$ tiene el mismo signo que L).

Demostración

Sea $\varepsilon = |L|/2$. Existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_0, \text{ y } x \in I \text{ implica que } |f(x) - L| < |L|/2;$$

aplicando la desigualdad del triángulo, concluimos que

$$|f(x)| > |L|/2 \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_0 \quad \text{y} \quad x \in I$$

Por tanto,

$|f(x)| \neq 0$ para tales puntos.

Si $f(x)$ y L fueran de signos contrarios, entonces

$$|f(x) - L| = |f(x)| + |L| > |L|/2,$$

lo que contradice el hecho de que

$$|f(x) - L| < |L|/2$$

TEOREMA 4.4 Sea f una función definida en (a, b) excepto, quizás, en x_0. Si $\lim_{x_0} f = L$, entonces existen $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$|f(x)| < M \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{y} \quad x \in (a, b)$$

Demostración

Para $\varepsilon=1$ tenemos que existe $\delta>0$ tal que

$$|f(x) - L| < 1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{y} \quad x \in (a, b);$$

usando la desigualdad del triángulo, concluimos que

$$|f(x)| < 1 + |L| \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{y} \quad x \in (a, b);$$

tomando $M = 1 + |L|$, se tiene la afirmación.

LIMITES DE SUMAS, PRODUCTOS Y COCIENTES DE FUNCIONES

Con los resultados del párrafo anterior, puede demostrarse el teorema siguiente:

TEOREMA 4.5 **Sean f y g funciones definidas en (a, b), excepto, quizás,** en x_0. Supóngase que

$$\lim_{x_0} f = \alpha \quad \text{y} \quad \lim_{x_0} g = \beta$$

Entonces,

1) $\lim\limits_{x_0} (f + g) = \alpha + \beta$

2) $\lim\limits_{x_0} (f \cdot g) = \alpha\beta$

3) Si, además, $\beta \neq 0$, entonces,

$$\lim_{x_0} (f/g) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Demostración

1) Sea $\varepsilon > 0$. Existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $0 < |x - x_0| < \delta_1$, y $x \in (a, b)$ implica que $|f(x) - \alpha| < \varepsilon/2$ y $0 < |x - x_0| < \delta_2$, y $x \in (a, b)$ implica que $|g(x) - \beta| < \varepsilon/2$.
   Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $0 < |x - x_0| < \delta$, y $x \in (a, b)$ implica que $|f(x) + g(x) - (\alpha + \beta)| \leqslant |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

2) Sea $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, $|f(x)g(x) - \alpha\beta| = |f(x)(g(x) - \beta) + \beta(f(x) - \alpha)| \leqslant |f(x)||g(x) - \beta| + |\beta||f(x) - \alpha|$, por el teorema 4.4 sabemos que existen $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$|f(x)| < M \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{y} \quad x \in (a, b)$$

Por tanto,

$$|f(x)g(x) - \alpha\beta| \leqslant M|g(x) - \beta| + |\beta||f(x) - \alpha|$$

si $0 < |x - x_0| < \delta_1$ y $x \in (a, b)$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$; existen δ_2 y δ_3 positivas que

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon/2(|\beta| + 1) \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \text{y} \quad x \in (a, b),$$

y

$$|g(x) - \beta| < \varepsilon/2M \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_3 \quad \text{y} \quad x \in (a, b)$$

Escójase $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$; entonces,

$$|f(x) - g(x)| \leqslant M\frac{\varepsilon}{2M} + |\beta|\frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in (a, b)$.

3) Por el inciso anterior basta demostrar que $\lim_{x_0} 1/g = 1/\beta$.

Sabemos por el teorema 4.3, que existe un intervalo $(c, d) \subset (a, b)$, con $x_0 \in (c, d)$, tal que $1/g$ está definida en este intervalo excepto, quizás, en x_0; es decir, para todo $x \in (c, d)$ distinto de x_0, se tiene $g(x) \neq 0$.

Sea $x \in (c, d)$, $x \neq x_0$. Entonces,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|g(x) - \beta|}{|\beta||g(x)|}$$

Ahora existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x) - \beta| < \frac{|\beta|}{2} \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{y} \quad x \in (c, d)$$

Por consiguiente,

$$|g(x)| > \frac{|\beta|}{2} \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{y} \quad x \in (c, d),$$

y, por último,

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|\beta|} \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{y} \quad x \in (c, d)$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - \beta| < \varepsilon\frac{|\beta|^2}{2} \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \text{y} \quad x \in (c, d)$$

Escójase $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}\right| < \varepsilon\frac{|\beta|^2}{2}\cdot\frac{2}{|\beta|^2} = \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{y} \quad x \in (c, d)$$

COROLARIO 4.1 Sean f, g como en el teorema anterior.

1) $\lim_{x_0} cf = c\alpha,\ c \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{x_0} (-f) = -\alpha$

3) $\lim_{x_0} (f - g) = \alpha - \beta$

EJEMPLOS

(a) $\lim_{x\to\pi/3} (x^2 + \operatorname{sen} x - \sec x) = \lim_{x\to\pi/3} x^2 + \lim_{x\to\pi/3} \operatorname{sen} x + \lim_{x\to\pi/3} \sec x =$

$$= \frac{\pi^2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$$

(b) $$\lim_{x\to 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 + \sqrt{5-x}} = \frac{\lim_{x\to 4}(3 - \sqrt{5+x})}{\lim_{x\to 4}(1 + \sqrt{5-x})} = \frac{3 - \lim_{x\to 4}\sqrt{5+x}}{1 + \lim_{x\to 4}\sqrt{5-x}} = 0$$

En algunos casos puede ocurrir que el límite de un cociente de funciones exista aun cuando el límite del denominador sea nulo. Por ejemplo, ya se indicó que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

existe y es igual a 4, aunque $\lim x - 2 = 0$.

PROPOSICION 4.2 Sean f y g dos funciones tales que f/g está definida en un intervalo abierto I, excepto, quizás, en un punto x_0. Si $\lim_{x_0} f/g$ y $\lim_{x_0} g$ existen y este último es igual a cero, entonces $\lim_{x_0} f = 0$.

Demostración

De la igualdad

$$f(x) = g(x)\frac{f(x)}{g(x)},$$

para todo $x \in I - \{x_0\}$, se sigue que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

En el ejemplo considerado se tiene en efecto que

$$\lim_{x\to 2} (x^2 - 4) = 0$$

Otros casos de la situación descrita, que serán de suma utilidad, son

$$\frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad [4.1]$$

para los cuales se tiene que

$$\lim_{x \to 0} x = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} 1 - \cos x = 0$$

Y si se obtienen con ayuda de una calculadora los cocientes [4.1] para varios valores de x próximos a cero, podrá intuirse que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

existen y son iguales a 0 y 1, respectivamente.

Ejercicio Calcúlese $(\operatorname{sen} x)/x$ para $x = 0.01$, 0.001, 0.0001 y 0.00001.

Ahora se demostrará formalmente que

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

Prueba La distancia entre el punto P_x del círculo unitario de coordenadas $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ y el punto $(1, 0)$ no excede a la magnitud del arco x, es decir (Fig. 4.7),

$$0 \leqslant \sqrt{(\cos x - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 x} \leqslant |x|$$

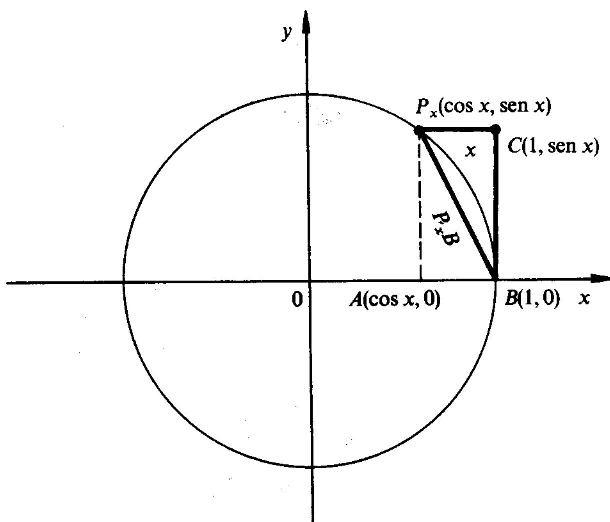


Figura 4.7

Si elevamos al cuadrado y simplificamos, se obtiene

$$0 \leqslant 2 - 2\cos x \leqslant x^2$$

Al dividir entre x resultan dos desigualdades:

$$0 \leqslant \frac{1 - \cos x}{x} \leqslant \frac{x}{2} \quad \text{si} \quad x > 0$$

$$\frac{x}{2} \leqslant \frac{1 - \cos x}{x} \leqslant 0 \quad \text{si} \quad x < 0$$

Si se aplica el teorema 4.2 (válido también para límites laterales), se tiene que los límites laterales

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1 - \cos x}{x}$$

son iguales a cero. De donde se sigue (a).

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

Prueba Si $0 < x < \pi/2$, entonces los puntos $P_x(\cos x, \operatorname{sen} x)$, $A(\cos x, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(1, \operatorname{sen} x)$ son tales que

distancia $(P_x, A) \leqslant x \leqslant$ distancia (P_x, C) + distancia (C, B) (véase Fig. 4.7).

Esto se expresa analíticamente así:

$$\operatorname{sen} x \leqslant x \leqslant (1 - \cos x) + \operatorname{sen} x$$

Por tanto,

$$x \leqslant (1 - \cos x) + \operatorname{sen} x \leqslant (1 - \cos x) + x$$

Si dividimos entre x, tenemos

$$1 \leqslant \frac{1 - \cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqslant \frac{1 - \cos x}{x} + 1$$

Aplicando el inciso (a) y el teorema 4.2, se tiene

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

En forma análoga se procede para

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

De donde se sigue (b).

La proposición 4.2 indica que, si para un cociente de funciones f/g se tiene que $\lim_{x_0} g = 0$ y $\lim_{x_0} f$ no es nulo, entonces

$$\lim_{x_0} f/g \text{ no existe.}$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe, pues

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

y

$$\lim_{x \to 0} 1 = 1 \neq 0$$

En forma más general,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a}{(x - x_0)^2}$$

no existe si $a \neq 0$.

Es posible establecer proposiciones similares a la anterior para límites laterales. Por ejemplo:

PROPOSICION 4.3 Sean f y g funciones tales que f/g está definida en un intervalo $[a, b)$, excepto, quizás, en x_0; si

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^+} g(x),$$

existen, y este último es igual a cero, entonces,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0$$

(Véase Fig. 4.8.)

En vista de esta proposición, se tiene que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{x - x_0} \text{ no existe,}$$

como se indicó en la sección de límites laterales.

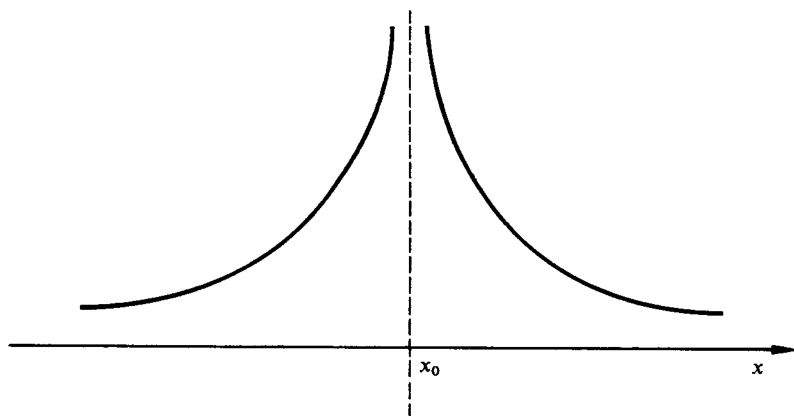


Figura 4.8

PROCEDIMIENTOS PARA EL CALCULO DE ALGUNOS LIMITES

Esta sección se inicia con dos ejemplos ilustrativos que reducen a un límite conocido el límite buscado mediante un «cambio de variable».

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3$

Solución Hágase $v = 3x$; por tanto,

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3\,\frac{\operatorname{sen} v}{v},$$

y como v tiende a cero cuando x tiende a cero, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \lim_{v\to 0} \frac{\operatorname{sen} v}{v} = 3$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Solución Obsérvese que $1 - \cos x = \cos 0 - \cos x$. Por tanto, si se usan identidades trigonométricas, se tiene

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\cos 0 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\,\frac{x}{2}}$$

Hágase $u = x/2$; así, como $\lim\limits_{u\to 0} (\operatorname{sen} u)/u = 1$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Analicemos otros casos mediante ejemplos.

3) Calcúlese

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Por la proposición 4.1, el cálculo de este límite equivale a calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2}$$

4) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x^2 - x - 2)}{(x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3}$$

Por tanto, el límite no existe ya que el límite del numerador es distinto de cero y el del denominador es cero.

5) Calcúlese

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

Solución Hágase $x = y^{12}$. Así, $\lim\limits_{x\to 1} y = 1$.

Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3 + y^2 + y + 1}{y^2 + y + 1} = \frac{4}{3}$$

6) Calcúlese

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$$

Solución Hágase $x = y^3$. Así, $\lim\limits_{x\to 1} y = 1$.

Por tanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2-2y+1}{(y^3-1)^2}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)^2}{(y-1)^2(y^2+y+1)^2}=$$
$$=\lim_{y\to 1}\frac{1}{(y^2+y+1)^2}=\frac{1}{9}$$

Observación En estos dos ejemplos, al cambiar x por y, resultó que ambas tendían a lo mismo; en general, esto no tiene por qué ser así.

LIMITES INFINITOS Y LIMITES CUANDO LA VARIABLE TIENDE A INFINITO

Si se observa la gráfica de la función $1/x^2$, se nota que esta función se comporta de manera interesante cerca del cero, pues mientras más nos aproximamos a éste, los valores de la función son cada vez más grandes. Dado que interesa estudiar el comportamiento de las funciones en la proximidad de un punto, conviene tener una manera de señalar que los valores de una función crecen en forma indefinida al aproximarnos a un punto.

DEFINICION 4.3 *Sea f una función definida en un intervalo abierto I, excepto, quizás, en x_0.*

Se dice que f tiende a $+\infty$ (o simplemente a ∞) cuando x tiende a x_0, si para cada número $M > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $f(x) > M$ si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in I$ (Figs. 4.9 y 4.10).

En este caso, se escribe

$$\lim_{x_0} f = \infty, \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

para señalar que f tiende a ∞ cuando x tiende a x_0. Sin embargo, esto no significa que el límite de la función f existe, sino sólo que f crece en forma indefinida conforme nos acercamos a x_0.

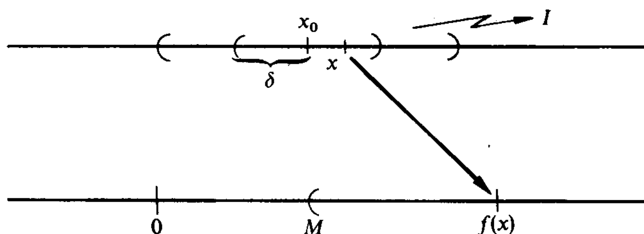


Figura 4.9

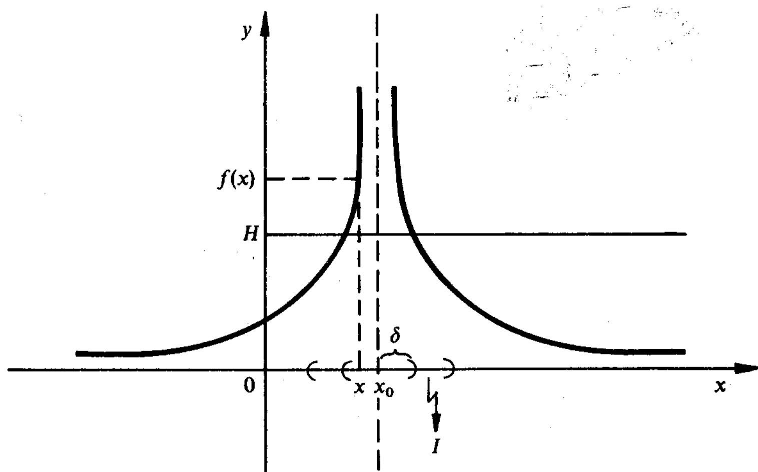


Fig. 4.10 Interpretación de las relaciones en términos de la gráfica de la función.

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Sea $M > 0$, se toma $\delta = 1/\sqrt{M}$. Si $0 < |x| < 1/\sqrt{M}$, entonces $x^2 = |x^2| < 1/M$. Por tanto, $1/x^2 > M$ si $0 < |x| < 1/\sqrt{M}$.

Al considerar la gráfica de la función $-1/x^2$ (Fig. 4.11), se observa que, conforme nos acercamos a cero, los valores de la función son negativos y, en valor absoluto, cada vez más grandes. Esta idea se precisa en la definición 4.4.

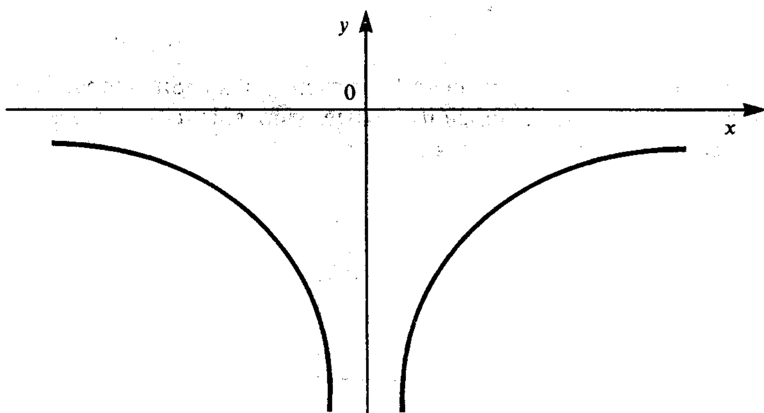


Figura 4.11

DEFINICION 4.4 *Sea f una función definida en un intervalo abierto I, excepto, quizás, en* x_0*; se dice que f tiende a* $-\infty$ *cuando x tiende a* x_0*, si para cada número* $M > 0$ *existe* $\delta > 0$*, tal que* $f(x) < -M$ si $0 < |x - x_0| < d$ *y* $x \in I$ (Figs. 4.12 y 4.13).

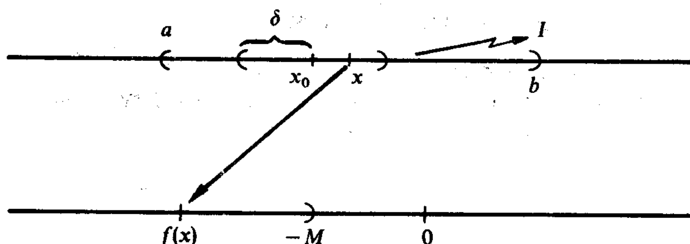


Figura 4.12

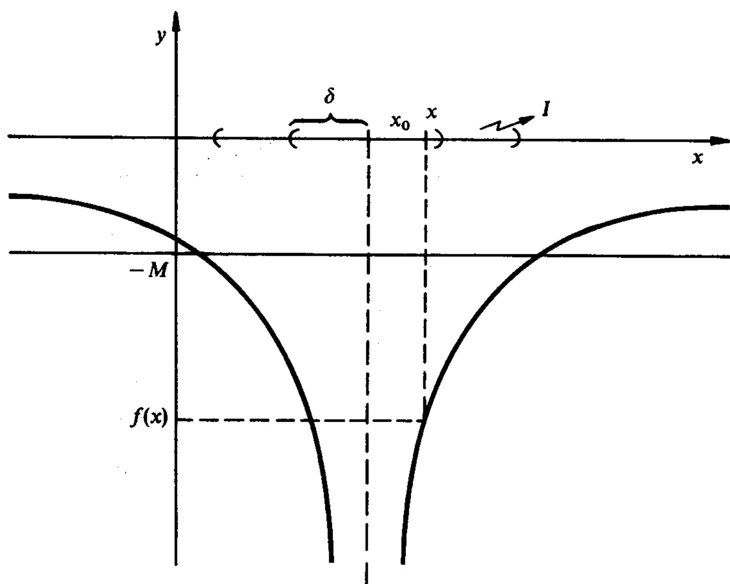


Fig. 4.13 Interpretación de las relaciones en términos de la gráfica de la función.

Se usan las notaciones

$$\lim_{x_0} f = -\infty, \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

para denotar que f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a x_0. Aquí también debemos tener presente que el límite de tal función no existe y las notaciones anteriores sólo sirven para expresar una forma de comportamiento de la función en la proximidad de x_0.

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

Sea $M > 0$. Se toma $\delta = 1/\sqrt{M}$;

si $0 < |x| < 1/\sqrt{M}$, entonces $x^2 < 1/M$.

Así, $-M > -1/x^2$ si $0 < |x| < \delta$.

El análisis de la gráfica de la función $1/x$ (Fig. 4.14) lleva a las definiciones de los conceptos correspondientes a los símbolos,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

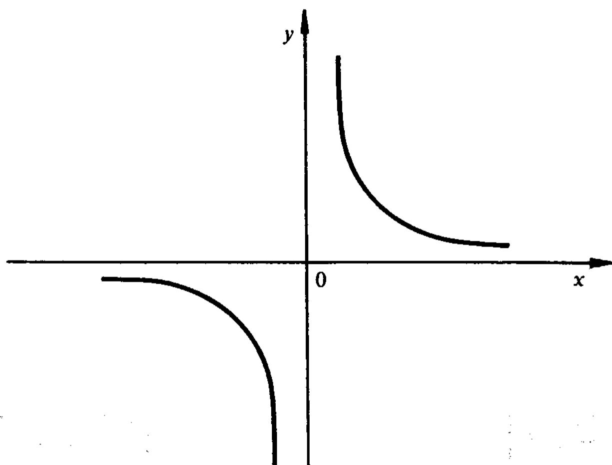


Figura 4.14

DEFINICION 4.5 *Sea f una función definida en un intervalo $I = [a, b)$, excepto, quizás, en un punto x_0. Se dice que f tiende a ∞ cuando x tiende a x_0 por la derecha, si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $f(x) > M$ si $0 < x - x_0 < \delta$ y $x \in I$.* (Figs. 4.15 y 4.16.)

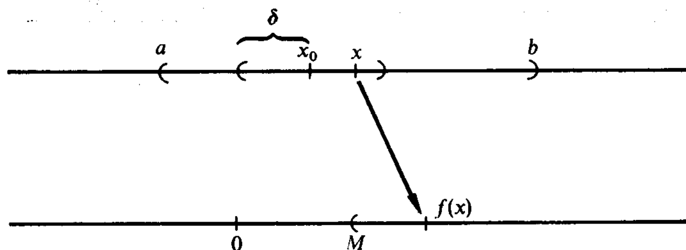


Figura 4.15

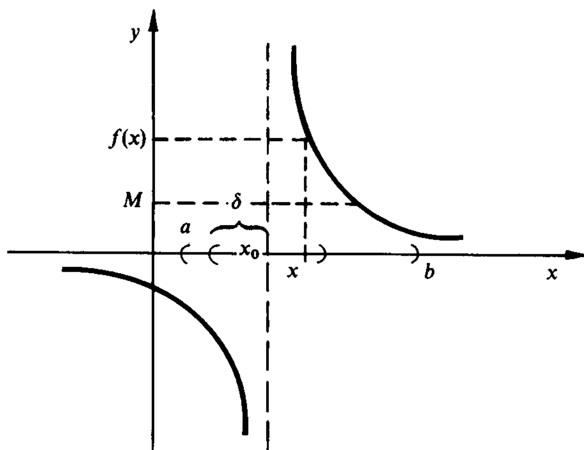


Fig. 4.16 Interpretación de las relaciones en términos de la gráfica de la función.

En este caso, se escribe

$$\lim_{x \to x_0^+} f = \infty$$

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

En forma más general,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = \infty$$

DEFINICION 4.6 *Sea f una función definida en un intervalo $I = (a, b]$, excepto, quizás, en x_0. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda, si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:*

$$f(x) < -M \text{ si } 0 < x_0 - x < \delta,\ x \in I \text{ (Figs. 4.17 y 4.18).}$$

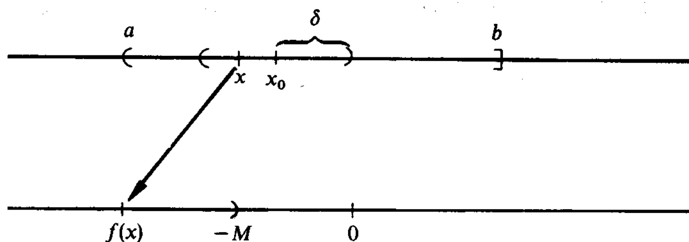


Figura 4.17

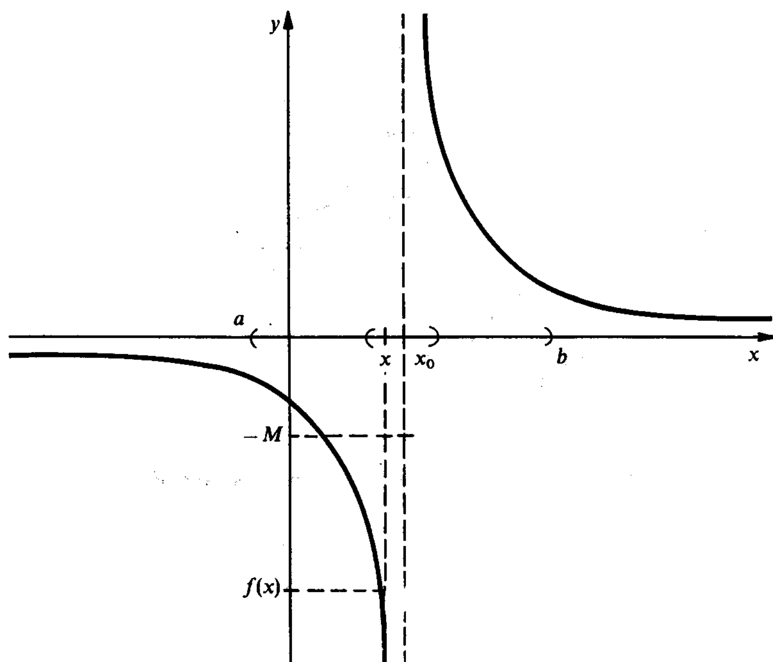


Fig. 4.18 Interpretación de las relaciones en términos de la gráfica de la función.

En este caso, se escribe

$$\lim_{x \to x_0^-} f = -\infty$$

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

En forma semejante pueden definirse los conceptos correspondientes a los símbolos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$$

y

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Al analizar de nuevo la gráfica de la función $1/x$, se observa que se aproxima cada vez más al eje x conforme nos alejamos del 0 por la derecha o por la izquierda. Es decir, los valores $1/x$ son cada vez más pequeños mientras x es cada vez más grande en valor absoluto, ya sea x positivo o negativo.

DEFINICION 4.7 *Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞). Se dice que f tiende a L cuando x tiende a ∞, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$, tal que*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{si} \quad x > M \quad \text{y} \quad x \in (a, \infty)$$

En este caso, se escribe

$\lim\limits_{\infty} f = L,$ o bien $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ (Figs. 4.19 y 4.20)

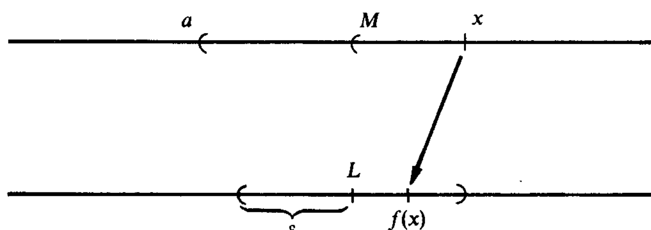


Figura 4.19

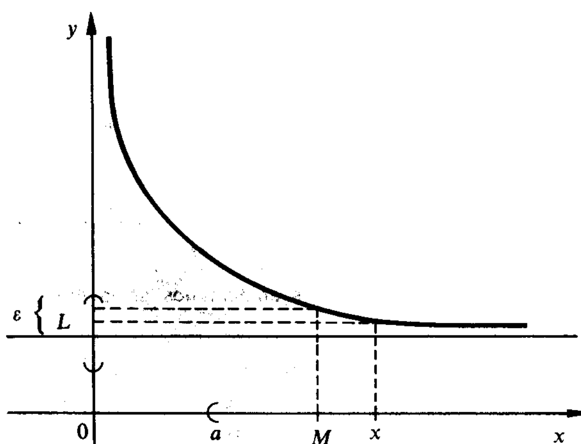


Fig. 4.20 Interpretación de las relaciones en términos de la gráfica de la función.

EJEMPLO

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

DEFINICION 4.8 *Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, b)$. Se dice que f tiende a L cuando x tiende a $-\infty$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$, tal que*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } x < -M \text{ y } x \in (-\infty, b) \text{ (Figs. 4.21 y 4.22).}$$

En este caso, se escribe

$$\lim_{-\infty} f = L, \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

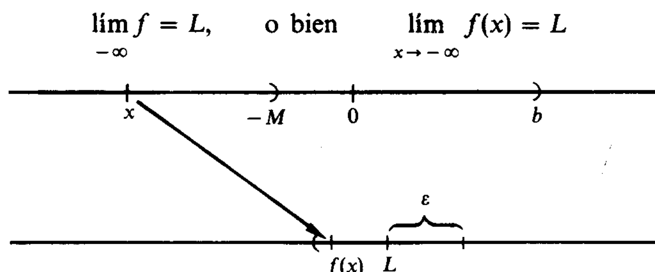


Figura 4.21

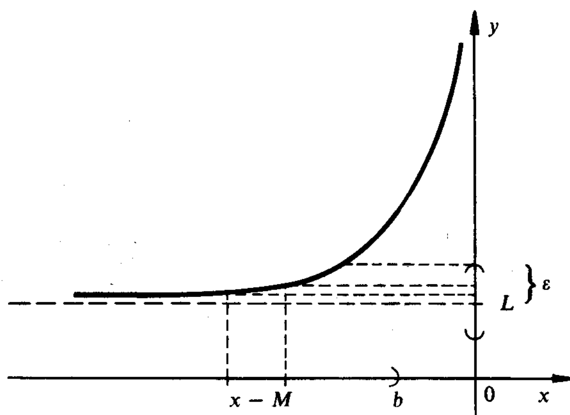


Fig. 4.22 Interpretación de las relaciones en términos de la gráfica de la función.

EJEMPLO

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Queda como ejercicio definir los conceptos correspondientes a los símbolos

$$\lim_{\infty} f = \infty \qquad \lim_{\infty} f = -\infty$$

$$\lim_{-\infty} f = \infty \qquad \lim_{-\infty} f = -\infty$$

y probar que, según estas definiciones, se tiene que:

1) $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$ 2) $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$

3) $\lim_{x \to \infty} -x^2 = -\infty$ 4) $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

ASINTOTAS

Una recta vertical es una asíntota vertical de la gráfica de f si se cumple alguna de las igualdades siguientes:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^-} = -\infty$$

Es decir, a medida que nos acercamos a a por la derecha (o izquierda), la gráfica y la recta se aproximan cada vez más. (Fig. 4.23.)

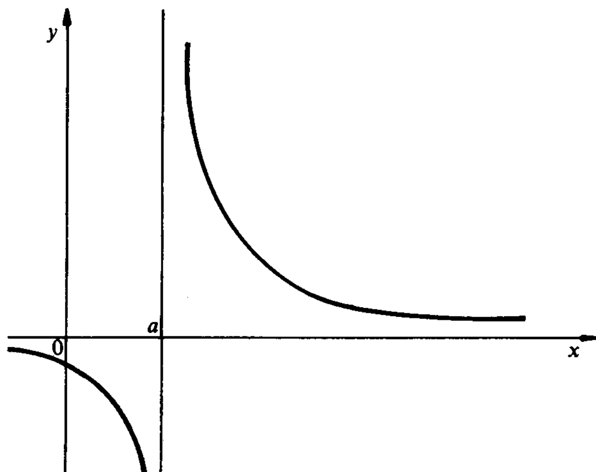


Figura 4.23

EJEMPLO La recta $x = 0$ es asíntota de la gráfica de la función $1/x$ (véase Fig. 4.23, haciendo $a = 0$).

Una recta no vertical $y = mx + b$ es una asíntota de la gráfica de f si cuando $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) la distancia de $(x, f(x))$ a la recta tiende a cero.

Sea $d(x)$ la distancia de $(x, f(x))$ a la recta $y = mx + b$. Recuérdese que

$$d(x) = \frac{|f(x) - mx - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Se observa que $|f(x) - mx - b|$ es la distancia medida, en forma vertical, de $(x, f(x))$ a $y = mx + b$.

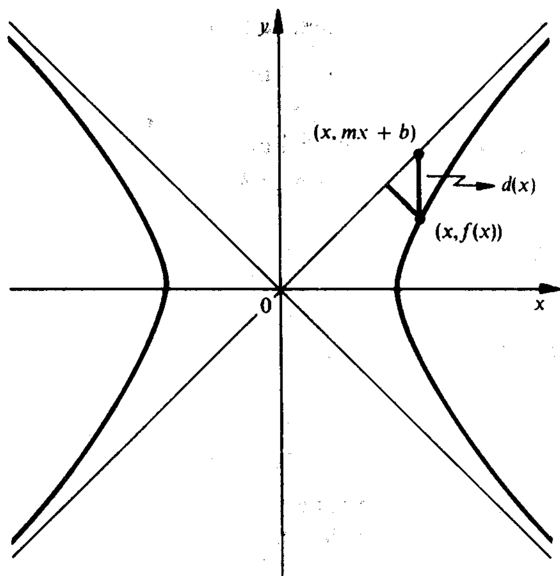


Figura 4.24

Así, la recta es una asíntota si, y sólo si, $f(x) - mx - b \to 0$ cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$).

En el caso particular en que $m = 0$, se dice que la recta es una asíntota horizontal.

Sea f una función definida en un intervalo, excepto, quizás, en un número finito de puntos, para determinar las asíntotas de la gráfica de f, se procede como sigue:

(a) Se determinan los puntos donde f es discontinua (en particular donde no está definida).

Si a es uno de ellos y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ es ∞ o $-\infty$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.

(b) Si f está definida en un intervalo del tipo (a, ∞), calcúlese

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Si tal límite es finito y vale m, calcúlese $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx)$. Si este último límite es finito y vale b, entonces la recta $y = mx + b$ es una asíntota de la gráfica de f.

En efecto, en este caso, $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx - b) = 0$; más aún, si una recta

$y = m_0x + b_0$ es una asíntota tal que $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - m_0x - b_0) = 0$, entonces m_0 y b_0 pueden obtenerse de la manera indicada, pues en ese caso,

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - m_0x) = b_0$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m_0\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_0}{x} = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m_0$$

(c) f está definida en un intervalo del tipo $(-\infty, b)$.

Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)/x$ es el número real m y $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$ es el número real b, entonces la recta $y = mx + b$ es una asíntota de la gráfica de f.

EJEMPLO

Sea $f:\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| \geqslant 1\} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1,$$

es decir, $m = 1$.

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

por tanto, una asíntota es la recta $y = x$.

Por otra parte,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{-|x|} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = -1,$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (-1)x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0,$$

por tanto, una asíntota es $y = -x$.

Además, no tiene asíntotas verticales.

EJERCICIOS

4.1 Dados los números x, L y $\varepsilon > 0$, determínese $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in \operatorname{dom} f$ para las funciones f siguientes.

a) $f(x) = 1 - 2x$, $x_0 = -1$, $L = 3$ y $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.0001$, $\varepsilon = 0.02$

b) $f(x) = x^2 - 4$, $x_0 = 2$, $L = 0$ y $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.0001$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -3$, $L = -6$ y $\varepsilon = 0.05$, $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.0004$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $L = 1$ y $\varepsilon = 0.002$, $\varepsilon = 0.0001$, $\varepsilon = 0.01$

e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x}$, $x_0 = 1$, $L = 2$ y $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.002$, $\varepsilon = 0.003$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $L = \frac{1}{2}$ y $\varepsilon = 0.002$, $\varepsilon = 0.02$, $\varepsilon = 0.2$

4.2 A partir de la definición de límite, demuéstrese que

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ b) $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{3}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x + 2} = -1$ f) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$
[*Sugerencia:* Desarróllese el binomio.]

g) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x^2) = 0$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{1 + x} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$

4.3 ¿En qué puntos son continuas las funciones de la pregunta anterior?

En los ejercicios siguientes, úsese el método empleado en los ejemplos 1 y 2, página 129, y dígase cuál es el límite.

4.4 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$ **4.5** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h^2}{h}$

4.6 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{x}$ **4.7** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

4.8 $\lim\limits_{h \to 0} h \dfrac{\operatorname{sen} h}{\operatorname{sen} 2h^2}$ **4.9** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$

4.10 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$ **4.11** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$

4.12 $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \tan x}$ **4.13** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x \tan x}$

4.14 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \tan x}{x^2}$

En los ejercicios siguientes, úsese el método empleado en los ejemplos 3 y 4, página 130, y dígase cuál es el límite.

4.15 $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

4.16 $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$

4.17 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x - 8}$

4.18 $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 2x - 8}$

4.19 $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^4 - 10x^2 + 9}$

4.20 $\lim_{x \to -1} \frac{x^9 + 1}{x^3 + 1}$

4.21 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

4.22 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{-x^2 + 10x - 16}$

4.23 $\lim_{x \to 3} \frac{x^6 - 729}{x - 3}$

En los ejercicios siguientes, úsese el método empleado en los ejemplos 5 y 6, página 130.

4.24 $\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

4.25 $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

4.26 $\lim_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$

[*Sugerencia:* Primero hágase $5 - x = y^2$; después, multiplíquese y divídase la expresión en y por $3 + \sqrt{10 - y^2}$.]

4.27 $\lim_{x \to 81} \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt[3]{x} - 3}$

4.28 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$

[*Sugerencia:* Multiplíquese y divídase por $\sqrt{1 + x + x^2} + 1$.]

4.29 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{x}$

4.30 $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

4.31 $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$

[*Sugerencia:* Hágase $b = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{x}$ y recuérdese que $y^n - b^n = (y - b)(y^{n-1} + by^{n-2} + \cdots + b^{n-1})$.]

Calcúlense los límites siguientes:

4.32 $\lim_{x \to -6^+} \sqrt{x+6} + x$

4.33 $\lim_{x \to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$

4.34 $\lim_{x \to \pi^-} \frac{|\pi - x|}{x - \pi}$

4.35 $\lim_{x \to 1^-} (1-x)\tan \frac{\pi x}{2}$

[*Sugerencia:* Recuérdese que $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]$.]

4.36 $\lim_{x \to 0^+} x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

4.37 $\lim_{x \to 0^-} x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

4.38 $\lim_{x \to 5^+} \frac{1 + \sqrt{2x - 10}}{x + 3}$

4.39 $\lim_{x \to 4^-} (x - \sqrt{16 - x^2})$

4.40 $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

4.41 $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

4.42 $\lim_{x \to 2^-} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2 + x - x^2}}$

4.43 $\lim_{x \to n^-} [x]$, donde $n \in \mathbb{Z}$

4.44 $\lim_{x \to n^+} [x]$, donde $n \in \mathbb{Z}$

4.45 $\lim_{x \to n^-} x - [x]$, $n \in \mathbb{Z}$

4.46 $\lim_{x \to n^+} x - [x]$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.47 $\lim_{x \to 2^-} (x+2)\sqrt{4 - x^2}$

4.48 $\lim_{x \to -3^+} \sqrt{x^2} - \sqrt{9 - x^2}$

4.49 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^3 x}{x^2 \operatorname{sen} x \cos x}$

4.50 $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

4.51 $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$

4.52 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+9} - 3}$

4.53 $\lim_{x \to 5} \frac{(x^2 - 9)(x - 5)}{(x^2 - 6x + 5)(x + 3)}$

4.54 $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}{3 \operatorname{sen} 3x}$

4.55 Supóngase que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} g(x) = c$

Pruébese que

$$\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

[*Sugerencia:* Obsérvese que si $c > 0$, entonces existe $M_0 > 0$ tal que $g(x) > M_0$ para x suficientemente grande.]

4.56 Para la función racional $R(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$.

Pruébese que

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } m > n \\ \infty & \text{si } n > m \text{ y } \dfrac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{si } n > m \text{ y } \dfrac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$$

[*Sugerencia:* Divídase el numerador y el denominador entre la máxima potencia de x, que aparece en $R(x)$.]

4.57 Establézcanse y pruébense resultados análogos a los de los ejercicios 4.55 y 4.56, cuando x tiende a $-\infty$.

Determínense los límites siguientes:

4.58 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 - 6x + 1}$

4.59 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}$

4.60 $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{(2x + 3)^4(4x - 1)^3}{x^7 + \frac{1}{2}}$

4.61 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 7x + 5}{x^3 + 2x + 1}$

4.62 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 3}$

[*Sugerencia:* Divídase el numerador y el denominador entre x y en el numerador introdúzcase x al radical.]

4.63 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 - 1}}$

4.64 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 4}}$

4.65 $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2}$

4.66 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + a^2} - x)$

4.67 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

4.68 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$

[*Sugerencia:* Hágase $y = \sqrt{x}$.]

4.69 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

4.70 $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

4.71 $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

4.72 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{4 - x^2}$

4.73 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{x}$.

4.74 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

4.75 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{6 - 5x + x^2}}$

4.76 $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

4.77 $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(x^3 + 2)^{10}}{\sqrt{9 - x^2}}$

Hállense las asíntotas de las curvas siguientes:

4.78 $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 9}$

4.79 $y = \dfrac{x}{x + 3}$

4.80 $y = \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

4.81 $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

4.82 $y = 1 - 2x^2$

4.83 $y = \dfrac{2}{x + 1}$

4.84 La siguiente «demostración» está equivocada; dígase por qué. Se trata de probar que $\lim\limits_{x_0} (f/g) = \lim\limits_{x_0} f/\lim\limits_{x_0} g$, suponiendo que $\lim\limits_{x_0} f$ existe y que $\lim\limits_{x_0} g \neq 0$.

Demostración Sea $h = f/g$. Por tanto, $f = hg$, y como sabemos, $\lim\limits_{x_0} hg = \lim\limits_{x_0} h \lim\limits_{x_0} g$, tenemos $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} g \lim\limits_{x_0} h$; despejando, tenemos por último que $\lim\limits_{x_0} f/\lim\limits_{x_0} g = \lim\limits_{x_0} f/g$, que es lo que quería demostrarse.

Francesco Bonaventura Cavalieri
(1598 a 1647)

En su juventud, se unió a una orden religiosa llamada «Clérigos Apostólicos de San Jerónimo», seguidora de las reglas de San Agustín, y que fue suprimida por el papa Clemente IX en 1668.

Su interés por las matemáticas nació y fue estimulado por los trabajos de Euclides; posteriormente, al conocer a Galileo, se consideró a sí mismo su discípulo.

En 1629 fue nombrado profesor de matemáticas de la Universidad de Bolonia; ya entonces había terminado su teoría del método de los indivisibles, mediante el cual determinaba magnitudes de figuras geométricas en forma semejante a la de los métodos del cálculo integral. Como una deferencia a Galileo, quien trabajaba en un tema semejante, retrasó seis años la publicación de sus resultados. Por fin, en 1638, apareció su trabajo titulado: Geometría Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota. *(«Cierto método para el desarrollo de una nueva geometría de los indivisibles continuos»).*

Como él mismo comentó en su Geometría, *el método presentado no era satisfactorio, siendo acremente criticado por el matemático suizo Paul Gulding. Como respuesta, Cavalieri, en 1647, escribió* Exercitationes Geometricae Sex *(«Seis ejercicios geométricos»), tratado, ampliamente utilizado por los matemáticos del siglo XVII, que establece de manera más satisfactoria el principio de los indivisibles.*

Además, escribió Directorio general de uranometría, *que introdujo en Italia el método de logaritmos como herramienta para hacer cálculos.*

Otras obras suyas son: Tratado sobre las secciones cónicas, Trigonometría lineal y logarítmica del plano y de la esfera.

En forma paralela a la vida de Cavalieri se destacan en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Lope de Vega: *Peribáñez y el comendador de Ocaña,* 1612; *Fuenteovejuna,* 1613; *El caballero de Olmedo,* 1623.
Quevedo: *El buscón,* 1626; *Los sueños,* 1627.

MUSICA

Briseño: *Método para aprender guitarra*, 1626.
Cavalli: *Bodas de Peleo y Tetis*, 1639.

PINTURA

Ribera: *Sileno borracho*, 1626; *Inmaculada Concepción*, 1635; *Cuadros de la Cartuja de San Martino*, 1638; *El milagro de San Genaro*, 1646.

ARQUITECTURA

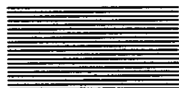
Se construye el Taj Mahal (1630-1648).

CULTURA EN GENERAL

Comenius: *Didáctica magna*, 1641.
Descartes: *Discurso del método*, 1637.
San Francisco de Sales: *Tratado de amor de Dios*, 1616.



Francesco Bonaventura Cavalieri



5 LA DERIVADA

Desde ahora el trabajo de Isaac Newton influirá en forma notable nuestro texto, pues él pudo concretar ideas que habían prevalecido bastante tiempo en el medio matemático acerca de los conceptos de área, tangente a una curva, longitud de una curva, etc. No se pretende menospreciar a otros fundadores del cálculo, y si se menciona a Newton, debería citarse a Wilhelm Leibnitz, Isaac Barrow, Galileo Galilei, etc.; sin embargo, las inquietudes que empujaron a Newton a convertirse en uno de los creadores del cálculo servirán de base para ilustrar a nuestros lectores. Se recomienda leer algunos libros, incluidos en la bibliografía, al final del libro.

TANGENTE A UNA CURVA

Como se mencionó en el capítulo 4, el concepto de límite permite resolver, para una amplia clase de curvas, el problema de determinar la tangente a una curva en un punto de la misma.

En efecto, consideremos la situación mostrada en la figura 5.1.

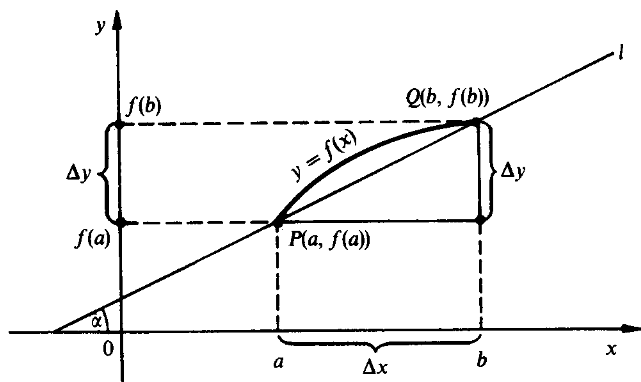


Figura 5.1

La recta l intersecta a la gráfica de la función $y = f(x)$ en los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ (digamos que la recta forma el ángulo respecto al eje x). En la misma figura se observa que

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad [5.1]$$

pero $\Delta y = f(b) - f(a)$ y $\Delta x = b - a$; por tanto,

$$\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{(cociente de Fermat);} \qquad [5.2]$$

o sea, la pendiente de la secante l de la curva está dada por [5.2].

Ahora bien, si se usa esta secante, ¿cómo podrá determinarse la pendiente de la tangente a la gráfica de f en P? Podría procederse así: considérese la familia de rectas secantes obtenidas al hacer que Q tienda a P, es decir, que b tienda a a, lo cual significa que $|a - b| \to 0$.

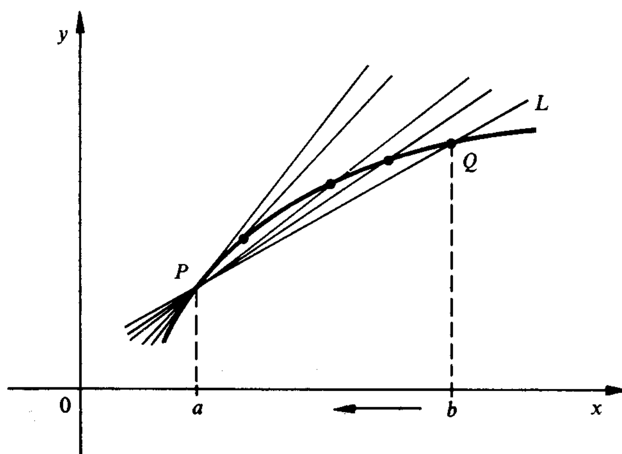


Figura 5.2

Se llama recta tangente a la gráfica en el punto $(a, f(a))$, al límite de las secantes, o la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene por pendiente

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

si tal límite existe; esto se denota en forma analítica de la manera siguiente:

$$\textit{pendiente de la tangente a la gráfica de } f \textit{ en } P = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad [5.3]$$

Si se designa con m a este límite, la ecuación de la recta tangente es

$$y - f(a) = m(x - a)$$

Nótese que la tangente a una curva en un punto se define como el límite de las secantes a esa misma curva que pasan por ese punto, y no como la recta que «corta» a la curva en un solo punto (quizá la «definición» familiar para el lector).

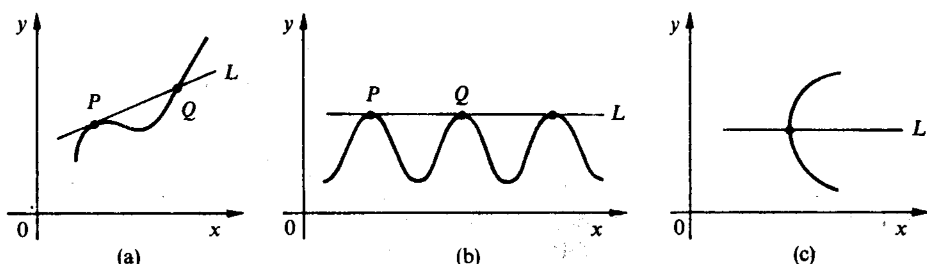


Figura 5.3

En la figura 5.3(a), la recta L es tangente a la gráfica de f en P y *no* lo es en Q. En la figura 5.3(b), la recta L es tangente a la curva en P y en Q; en la figura 5.3(c), la recta L no es tangente a la curva en ningún punto.

Si el límite [5.3] existe, se dice que la función f es *derivable* en el punto a. (Recuérdese que al aproximar el punto Q al punto P se ha fijado la abscisa a y se ha «movido» la abscisa b.) A continuación, tenemos la definición siguiente:

DEFINICION 5.1 *Al límite* [5.3], *si existe, se le conoce como la derivada de f en el punto a.*

Observación 5.1 En la figura 5.1, si $b \neq a$, entonces existe un real $h \neq 0$, tal que

$$b = a + h,$$

por tanto, el cociente [5.2] puede escribirse como

$$\tan \alpha = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{(cociente de Newton);}$$

y una forma equivalente de expresar la fórmula [5.3] será:

$$\textit{pendiente de la tangente a la gráfica de } f \textit{ en } P = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \qquad [5.3']$$

En forma geométrica, lo anterior se anota así: si β es el ángulo que forma la tangente con el eje x, entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta,$$

donde $\Delta y = f(a + h) - f(a)$ y $\Delta x = h$ (Fig. 5.4).

Observación 5.2 Si la función f es derivable en un punto a, entonces $f'(a)$, o bien $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ denotará el límite [5.3].

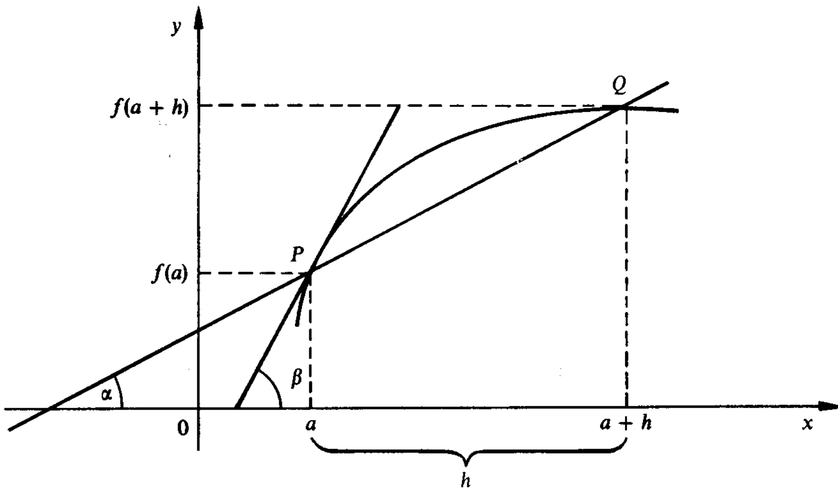


Figura 5.4

DEFINICION 5.2 ***Se dice que f es derivable en un intervalo (a, b) si es derivable en cada punto del mismo intervalo.***

La función derivada f' de f se define como aquella que asocia el número real $f'(x)$ a cada x en el dominio de f para el cual exista $f'(x)$.

EJEMPLOS

1. Hállese la derivada de la función $f(x) = x^2 + 4$ en el punto x.

   Sea $h > 0$, $f(x + h) = (x + h)^2 + 4 = x^2 + 2xh + h^2 + 4$; $f(x) = x^2 + 4$. Por tanto,

$$f(x + h) - f(x) = 2xh + h^2;$$

y así,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 2x + h;$$

de modo que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

2. Hállese la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 + 1$, en el punto de la curva cuya abscisa es 1.

   Se escribe el cociente de Newton, y se tiene

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(3(x+h)^2 + 1) - (3x^2 + 1)}{h} = \frac{6xh + 3h^2}{h} = 6x + 3h,$$

por lo que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 6x + 3h = 6x.$$

   Este resultado es válido para todo x. Así, en el punto cuya abscisa es 1, se tiene $f'(1) = 6(1) = 6$. Por tanto, la recta tangente buscada tiene por pendiente 6, donde su ecuación es

$$y = 6x + b.$$

   Pero si $x = 1$, entonces $f(x) = 3(1)^2 + 1 = 4$; en consecuencia, $b = -2$, de donde la solución es, por último, $y = 6x - 2$.

En el ejemplo siguiente se verá una aplicación del concepto de límite lateral, tratado en el capítulo 3.

3. Calcúlese la función derivada de la función $f(x) = |x|$.

   $|x|$ no es derivable en $x = 0$ ya que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

   De hecho, se tiene que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

(recuérdese que $|a| = -a$ si $a < 0$). Y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Por tanto, no puede hablarse de derivada en el origen.

   Para calcular la derivada en $x \neq 0$, supóngase que $x > 0$, y sea h lo suficientemente pequeño para que $x + h > 0$; entonces,

$$\frac{|x+h| - |x|}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

por lo que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Ahora, supóngase que $x < 0$, y sea h lo suficientemente pequeño para que $x + h < 0$; entonces,

$$\frac{|x+h|-|x|}{h}=\frac{-(x+h)-(-x)}{h}=-1,$$

por lo que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim_{h\to 0}(-1)=-1$$

En resumen,

$$f'(x)=(|x|)'=\begin{cases}1 \text{ si } x>0\\ \text{no existe si } x=0\\ -1 \text{ si } x<0\end{cases}$$

Si existe el límite

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

se dice que la función es *derivable en x por la derecha.* En forma análoga, si existe el límite

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

se dice que la función es *derivable en x por la izquierda.*

En general, al decir que una función es *derivable* en $[a, b]$, se entiende que es derivable en (a, b), y es derivable en a por la derecha y en b por la izquierda.

4. Sea $f(x) = [x]$ (recuérdese que este símbolo denota a la función *el mayor entero menor o igual que x*). ¿Cuánto vale su derivada por la izquierda en $x = 1$?; y, ¿cuánto vale su derivada por la derecha en $x = 1$?

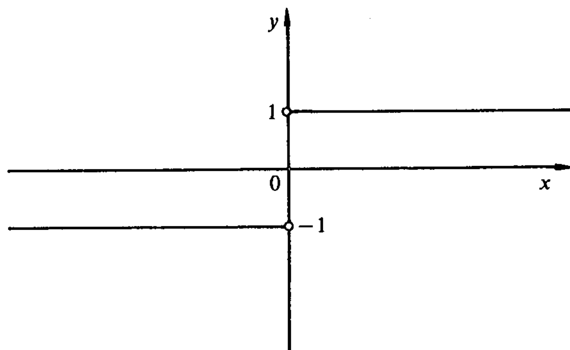


Fig. 5.5 Gráfica de la función derivada de $|x|$.

Recuérdese que la gráfica de la función $[x]$ es como la ilustrada en la figura 5.6.

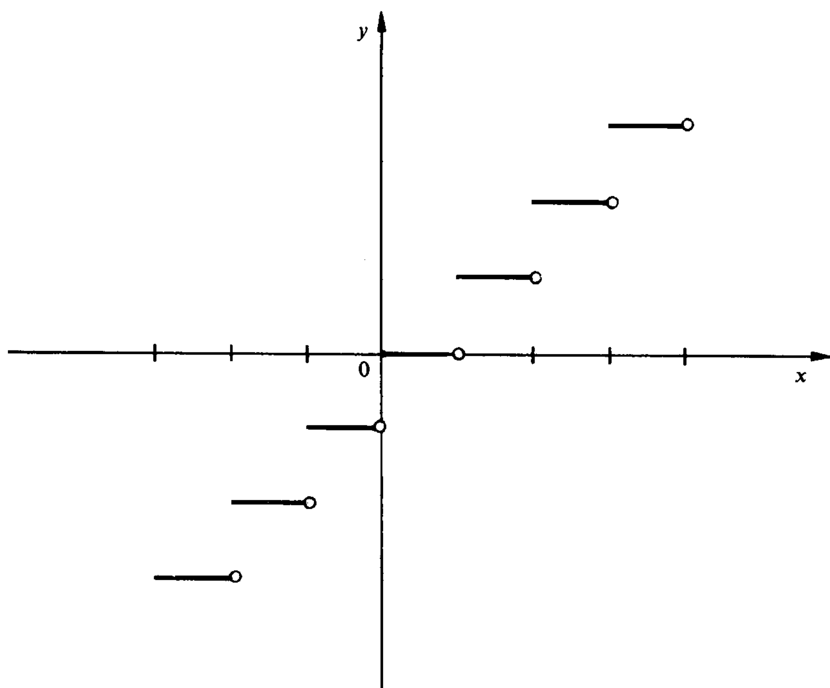


Figura 5.6

Veamos, primero, cuánto vale la derivada por la izquierda en $x = 1$.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{[1+h]-[1]}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{h} = +\infty$$

Ahora, cuánto vale la derivada por la derecha en $x = 1$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{[1+h]-[1]}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

Por tanto, $f(x) = [x]$ no es derivable en $x = 1$, su derivada por la izquierda no existe y la derivada por la derecha es 0.

El ejemplo 3 muestra que para que una función sea derivable, no es suficiente que sea continua. Sin embargo, la proposición inversa sí es cierta.

TEOREMA 5.1 Sea f una función definida en (a, b) con valores en $\mathbb{R}$. Si f es derivable en $x_0 \in (a, b)$, entonces f es continua en x_0.

Demostración Consideremos la igualdad siguiente:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad x \neq x_0,$$

o sea,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left\{(x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\right\} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

o sea, la función f es continua en x_0.

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE DERIVACION

En los teoremas siguientes se supondrá que las funciones tratadas tienen por dominio un intervalo abierto I, y que tanto x como $x + h$ están en el dominio de definición de las funciones f, g, ...

TEOREMA 5.2 **La derivada en cada punto de la función constante $f(x) = c$ (c = constante) es igual a cero.**

Demostración Para hacer las demostraciones de este teorema y el siguiente, se recomienda simplemente recordar la relación existente entre la derivada en un punto y la tangente en ese punto a la gráfica de la función.

TEOREMA 5.3 La derivada de la función identidad $i(x) = x$ es en cada punto igual a 1.

TEOREMA 5.4 Sean f y g funciones derivables en x_0, entonces, la derivada de la suma de las dos funciones en x_0 es igual a la suma de sus derivadas en x_0; es decir,

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Demostración Considérese el cociente de Newton para nuestra función.

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Por tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right\}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Ya que, por hipótesis, las funciones f y g son derivables, así

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0);$$

o sea,

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

En general, se tiene, *inductivamente*, que

$$(f_1+\cdots+f_n)'(x_0)=f_1'(x_0)+\cdots+f_n'(x_0)$$

TEOREMA 5.5 Sean f y g funciones derivables en x_0. La derivada del producto de dichas funciones es igual al producto de la derivada de la primera función en x_0 por la segunda función en x_0, más el producto de la derivada de la segunda función en x_0 por la primera función en x_0; es decir,

$$(fg)'(x_0)=g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Demostración

$$\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

Súmese y réstese en el numerador $g(x_0)f(x_0+h)$; así,

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-g(x_0)f(x_0+h)+g(x_0)f(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}+\frac{g(x_0)[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}$$

Por tanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} +$$

$$+ \lim_{h \to 0} g(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Recuérdese que f es derivable; por tanto, es continua, según se enunció en el teorema 5.1, de donde

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Pero g es también derivable, por hipótesis; entonces,

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

Como caso particular se tiene el correspondiente a la derivada del producto de una constante por una función, la cual es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

EJEMPLO

Calcúlese la derivada* de la función

$$h(x) = x^2 + 3x + 2$$

Por el teorema 5.4, basta calcular la derivada de cada sumando y después sumar; así,

$$\frac{dx^2}{dx} = x\frac{dx}{dx} + x\frac{dx}{dx} = 2x$$

Por otra parte,

$$\frac{d}{dx}3x = 3\frac{dx}{dx} + x\frac{d3}{dx} = 3$$

Y, además,

$$\frac{d}{dx}2 = 0$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3$$

Al generalizar en forma inductiva el teorema 5.5, se tiene:

* Para abreviar, se usará el término derivada en vez de función derivada.

TEOREMA 5.6 La derivada del producto de n funciones derivables en x_0 es igual a la suma de los productos de la derivada de cada función en x_0 por todas las funciones restantes evaluadas en x_0.

TEOREMA 5.7 Sea f una función derivable y tal que $f(x) \neq 0$ para todo x en el dominio de f. Entonces, la derivada de $1/f(x)$ existe en x_0 y es igual a

$$-\frac{1}{[f(x_0)]^2} f'(x_0) \qquad \text{para cada } x_0 \text{ del dominio de } f.$$

Demostración Considérese el cociente de Newton para la función $1/f(x)$. Tomando en cuenta que $f(x_0) \neq 0$, entonces $f(x_0 + h) \neq 0$ para h suficientemente pequeña y, así,

$$\frac{\dfrac{1}{f(x_0 + h)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{f(x_0 + h)f(x_0)h} = \frac{1}{f(x_0 + h)f(x_0)} \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h}$$

Ahora, como f es una función continua en x_0, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{f(x_0 + h)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x_0 + h)f(x_0)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{f(x_0)^2} \lim_{h\to 0} \left(-\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) = -\frac{1}{[f(x_0)]^2} f'(x_0),$$

lo que se quería demostrar.

Combinando los teoremas 5.5 y 5.7, se tiene que

TEOREMA 5.8

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Demostración Se recomienda que el lector haga la prueba.

Basándose en los teoremas anteriores, se mostrará que la fórmula

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \qquad [5.4]$$

es válida para todo entero n distinto de 0.

En efecto, sea $n > 0$. Por el teorema 5.4, se tiene que la derivada de la función $g(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, es

$$\frac{d}{dx}x^n = \underbrace{\underbrace{x\ldots x}_{\substack{(n-1)\\ \text{factores}}}\frac{dx}{dx} + \cdots + \underbrace{x\ldots x}_{\substack{(n-1)\\ \text{factores}}}\frac{dx}{dx}}_{n\ \text{sumandos}} = x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1},$$

por lo que

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Para $n < 0$, procedemos a escribir $n = -m$, donde m es un entero positivo, de este modo

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{\dfrac{dx^m}{dx}}{x^{2m}},$$

por el teorema 5.6, y en consecuencia,

$$\frac{d}{dx}x^n = -m\frac{x^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}} = -mx^{-m-1};$$

por tanto,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},$$

donde n es un entero negativo.

La fórmula [5.4] es también válida para exponentes racionales; es decir, $n = p/q$, con p y q enteros y $q \neq 0$. Por ahora sólo se probará esta afirmación para exponentes del tipo $1/q$, con q entero positivo. Sea $x_0 \in \operatorname{dom} x^{1/q}$, con $x_0 \neq 0$

$$x - x_0 = (x^{1/q} - x_0^{1/q})(x^{1-1/q} + x^{1-2/q}x_0^{1/q} + \cdots + x_0^{1-1/q});$$

por tanto,

$$\frac{x^{1/q} - x_0^{1/q}}{x - x_0} = \frac{1}{x^{1-1/q} + x^{1-2/q}x_0^{1/q} + \cdots + x_0^{1-1/q}}$$

Finalmente,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^{1/q} - x_0^{1/q}}{x - x_0} = \frac{1}{qx_0^{1-1/q}} = \frac{1}{q}x_0^{1/q-1},$$

ya que

$$\lim_{x \to x_0} x^{1-p/q} x_0^{(p-1)/q} = x_0^{1-1/q}$$

DERIVACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Se probará que las funciones trigonométricas son derivables en sus dominios naturales.

TEOREMA 5.9 Las funciones sen y cos son derivables en $\mathbb{R}$. Más aún,

$$\text{sen}' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\text{sen}\, x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración
El cociente de Newton

$$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h}$$

puede escribirse de la manera siguiente:

$$\frac{\text{sen}\, x \cos h + \text{sen}\, h \cos x - \text{sen}\, x}{h}$$

Al dividir esta expresión en dos partes y factorizar a $\text{sen}\, x$ en la primera, tenemos

$$\frac{\cos h - 1}{h} \text{sen}\, x + \frac{\text{sen}\, h}{h} \cos x$$

Al tomar el límite cuando h tiende a 0, se sigue que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = \cos x$$

a partir de los límites calculados en la página 125.

La segunda igualdad del enunciado se demuestra en forma similar, dejándola como ejercicio para el lector.

Si se conocen las derivadas de las funciones sen y cos, se sigue de inmediato el teorema siguiente.

TEOREMA 5.10 Las funciones trigonométricas tan, cot, sec y csc son derivables en cada punto de sus dominios naturales; sus derivadas son

$$\tan' x = \sec^2 x \qquad \sec' x = \tan x \sec x$$

$$\cot' x = -\csc^2 x \qquad \csc x = -\cot x \csc x$$

en cada x del dominio correspondiente.

Demostración Se probará sólo la primera igualdad, y de manera análoga se deja al lector la demostración de las restantes.

Sea $x \neq (2n + 1)\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$.

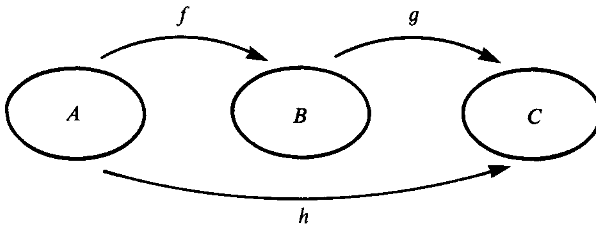
$$\tan' x = \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

COMPOSICION DE FUNCIONES

Considérense las funciones $f:A \to B$ y $g:B \to C$. Se hablará de otra función, cuya regla de correspondencia es

$$h(a) = g(f(a))$$



Es decir, aplicamos primero f al elemento a y, después, g al elemento $f(a)$.

El dominio natural de h es A y su codominio, C.

Por ejemplo, sean $f:\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tales que $f(x) = 1/x$ y $g(y) = y^2$; entonces, la función h tendrá por dominio $\mathbb{R} - \{0\}$ y por imagen los reales positivos, y será tal que

$$h(z) = \frac{1}{z^2} \qquad [5.5]$$

(se dice que h es la composición de f seguida de g, o bien que h es una función *compuesta*). Veamos por qué se tiene [5.5].

Sea $z \in \mathbb{R} - \{0\}$. Primero se manda a su recíproco, $1/z$. A continuación se manda $1/z$ a su cuadrado mediante la función g, es decir, a $1/z^2$.

Para la composición de funciones se utiliza una notación especial, que consiste en un pequeño círculo intercalado entre las dos funciones, es decir,

$$g \circ f$$

Puesto que en el ejemplo anterior h era la composición de f seguida de g, entonces

$$h = g \circ f$$

Este concepto se extiende a más de dos funciones. Por ejemplo, para tres funciones, la regla de correspondencia sería

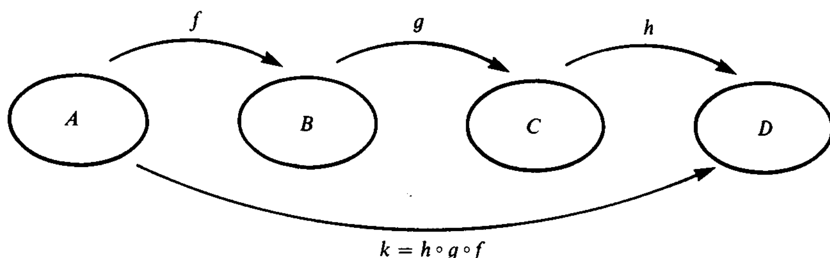


Figura 5.7

$$k(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

EJEMPLO

$$\operatorname{sen}(x^2 + 1)$$

Aquí, se tiene que

$$f(x) = x^2$$
$$g(y) = y + 1$$
$$h(z) = \operatorname{sen} z$$

¡Compruébelo!

DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA

El lector encontrará a menudo expresiones de funciones de aspecto complicado, pues a partir de funciones que se denominarán elementales, podemos construir otras más descriptivas y, por tanto, más útiles, aunque más complicadas. Con objeto de derivar (si es posible) funciones compuestas, se enunciará y aplicará el teorema siguiente, cuya demostración aparece en la página 177.

TEOREMA 5.11 Sean f y g funciones derivables, de manera que g se encuentra definida en todos los valores de la imagen de f. Entonces, la función $g \circ f$ es derivable y se tiene:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

A este teorema se le conoce también como *regla de la cadena.*

Como aplicación de esta regla, se probará que

$$\frac{d}{dx}(x^{p/q}) = \frac{p}{q}x^{p/q-1}, \text{ donde } \frac{p}{q} \text{ es un racional.}$$

Sean $f(y) = y^p$ y $g(x) = x^{1/q}$ (puede suponerse que $q > 0$).

$$x^{p/q} = (f \circ g)(x)$$

Por la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{df}{dy}(g(x))\frac{d}{dx}g(x)$$

Pero,

$$\frac{df}{dy}(g(x)) = p(x^{1/q})^{p-1} \quad \text{y} \quad \frac{dg(x)}{dx} = \frac{x^{1/q-1}}{q},$$

por tanto,

$$\frac{dx^{p/q}}{dx} = \frac{p}{q}x^{(p-1)/q}x^{1/q-1} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}$$

La fórmula [5.4] es válida para cualquier exponente real; más adelante se probará que es válida también para exponentes irracionales.

EJEMPLOS

(a) Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(u) = u^2$.

Por lo ya visto, tanto f como g son derivables en todo $\mathbb{R}$; así,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2;$$

por tanto,

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = 2(x^2 + 1)(2x) = 4(x^3 + x)$$

(b) Sea $y = \operatorname{sen}^2 x$. Calcúlese $\frac{d}{dx}y$.

Para ser congruentes con nuestra notación, se dirá que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(u) = u^2$. Por tanto,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}^2 x;$$

entonces,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

(c) Calcúlese la derivada, respecto a x, de $\dfrac{1}{x^2 + 3}$.

Hágase $f(x) = x^2 + 3$ y $g(y) = 1/y$. Entonces,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3};$$

por tanto,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f(x) = -\frac{1}{(x^2 + 3)^2} \cdot 2x$$

Ejercicios
Calcúlese la derivada respecto a x de las funciones siguientes:

1. $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ donde $x \neq -1$
2. $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{z}\right)$ donde $z \neq 0$
3. $(x^2 + 1)^3$
4. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$
5. $\left(\dfrac{1}{(z + 1)^3}\right)^2$

DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA

TEOREMA 5.12 Sea $y = f(x)$ una función derivable tal que su derivada no se anula en el punto x_0; supóngase que existe su función inversa $x = \varphi(y)$. Entonces existe la derivada de φ en $y_0 = f(x_0)$, y se calcula así:

$$\frac{d\varphi}{dy}(y_0) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x_0)}$$

Demostración No se demuestra la existencia de la derivada de φ en y_0, por no corresponder al objetivo de este libro. Para demostrar la otra afirmación, derivemos respecto a x ambos miembros de $x = \varphi(y)$, con lo que se obtiene

$$1 = \frac{d\varphi}{dy}(y_0)\,\frac{dy}{dx}(x_0);$$

por tanto,

$$\frac{d\varphi}{dy}(y_0) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x_0)}$$

El hecho enunciado en el teorema puede ilustrarse en forma geométrica: considérese la gráfica de la función $y = f(x)$ (Fig. 5.8). Cuando en la misma gráfica se consideran los valores y correspondientes a la variable independiente y los valores x correspondientes a la variable dependiente, entonces tenemos también ilustrada la gráfica de la función $x = \varphi(y)$ (aunque, como es natural, con los ejes intercambiados).

Sea α el ángulo formado con el eje x, por la recta tangente a la curva que pasa por el punto P; y sea β el ángulo que forma, a su vez, la misma recta con el eje y.

De acuerdo con lo ya visto sobre el significado geométrico de la derivada, se tiene que

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \tan\alpha$$

y

$$\frac{d\varphi}{dy}(y_0) = \tan\beta \qquad [5.6]$$

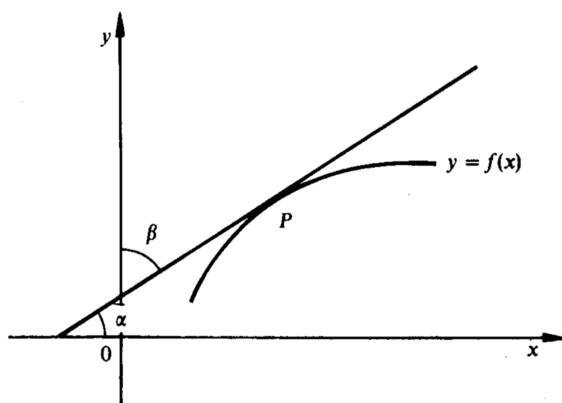


Figura 5.8

Ahora bien, si $\alpha < \pi/2$, entonces

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

pero si $\alpha > \pi/2$, entonces se tiene

$$\beta = \tfrac{3}{2}\pi - \alpha \quad \text{(véase Fig. 5.9)}$$

pues, por trigonometría, resulta que

$$(\pi - \beta) + (\pi - \alpha) = \frac{\pi}{2}, \text{ de donde } \beta = \tfrac{3}{2}\pi - \alpha$$

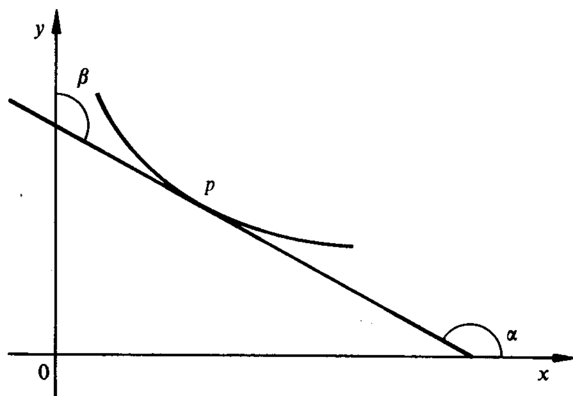


Figura 5.9

De cualquier manera, se tiene que

$$\tan \beta = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \qquad [5.7]$$

Sustituyendo en [5.6], se tiene, por último, que

$$\frac{d\varphi}{dy}(y_0) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x_0)}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

TEOREMA 5.13 Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son:

1) $(\text{ang sen})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x \in (-1, 1)$

2) $(\text{ang cos})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x \in (-1, 1)$

3) $(\text{ang tan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}; \quad x \in (-\infty, \infty)$

4) $(\text{ang cot})'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}; \quad x \in (-\infty, \infty)$

5) $(\text{ang sec})'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}; \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

6) $(\text{ang csc})'(x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}; \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Demostración En la prueba de cada uno de los incisos se hace uso del teorema 5.12.

1) Sea $x \in (-1, 1)$. Existe un único real $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\text{sen}\, y = x$ (o sea $y = \text{ang sen}\, x$). Así,

$$(\text{ang sen})'(x) = \frac{1}{\cos y},$$

como

$$\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \quad \text{y} \quad \cos y > 0$$

(recuérdese que $-\pi/2 < y < \pi/2$), se sigue que

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$$

Es decir,

$$(\text{ang sen})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) La afirmación se sigue de las igualdades

$$(\text{ang tan})'(x) = \frac{1}{\sec^2 y},$$

y

$$\sec^2 y - \tan^2 y = 1,$$

donde

$$y = \text{ang tan } x$$

5) Sea $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Si $y = \text{ang sec } x$, entonces,

$$(\text{ang sec})'(x) = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

Como

$$\sec^2 y - \tan^2 y = 1,$$

se tiene

$$|\tan y| = \sqrt{\sec^2 y - 1}$$

Por otra parte, la función tan es positiva en $(0, \pi/2)$, y negativa en $(\pi/2, \pi)$. Así,

$$|\tan y| = \begin{cases} -\sqrt{\sec^2 y - 1}; & y \in (\pi/2, \pi) \\ \sqrt{\text{sen}^2 y - 1}; & y \in (0, \pi/2) \end{cases}$$

Por tanto,

$$(\text{ang sec})'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}; & x \in (-\infty, -1) \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}; & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

por lo que

$$(\text{ang sec})'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

La prueba de los demás incisos se deja como ejercicio para el lector.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Obsérvese que si una función es derivable en cierto intervalo, entonces su función derivada también es una función definida en ese intervalo. Sin embargo, no es posible asegurar que la función derivada también sea derivable.

Por ejemplo, considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, existe en un intervalo I tal que $x \in I$ y tal que en cada punto de ese intervalo

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Por tanto,

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Ahora, si $x = 0$, se procede a formar el cociente de Newton

$$\frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = h \operatorname{sen} \frac{1}{h}$$

Por tanto, $f'(0) = 0$. Así,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

y esta función no es continua en cero, pues si lo fuera, entonces la función

$$g(x) = \begin{cases} \cos 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

sería continua en cero, lo cual no es cierto, de acuerdo con lo visto en el capítulo 3 sobre continuidad.

Si existe la derivada de la derivada de una función, llamamos entonces a esta nueva función la segunda derivada de f, y usamos para ella en forma indistinta la notación f'', o bien

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

En forma similar podrá hablarse de derivadas de mayor orden; por ejemplo, la derivada de orden 6 de una función se denotará

$$f^{(6)}, \quad \text{o bien} \quad \frac{d^6}{dx^6} f(x)$$

En general, si la derivada es de orden n, se denotará de la manera siguiente:

$$f^{(n)}, \quad \text{o bien} \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)^*$$

* Para $n = 0$ se define $f^{(n)}(x) = f(x)$.

EJEMPLOS

1. Encuéntrese la derivada de orden 3 respecto a u de la función

$$f(u) = u^3 + 2u + 1$$

Solución La función dada se deriva tres veces, esto es,

(a) $f'(u) = 3u^2 + 2$
(b) $f''(u) = 6u$
(c) $f'''(u) = 6$; por tanto, el paso (c) da la respuesta.

2. Encuéntrese la derivada, respecto a t, de orden 2 de

$$h(t) = 2t^2 + 4t \text{ en el punto } t = -1$$

Solución Se observa que $h'(t) = 4t + 4$, por lo que $h'(-1) = 0$, mientras que $h''(t) = 4$, por lo cual $h''(-1) = 4$.

En este ejemplo se anula la primera derivada, mientras que la segunda es distinta de cero; esto se utilizará en el capítulo siguiente.

Ahora, se pregunta: ¿a qué será igual la derivada, por ejemplo, de la derivada de una suma de funciones, es decir, $(f(x) + g(x))'' = ?$

Se sabe que

$((f(x) + g(x))')' = (f'(x) + g'(x))' = f''(x) + g''(x)$; por lo que
$(f(x) + g(x))'' = f''(x) + g''(x)$; en forma semejante, se tiene que
$(f(x) + g(x))''' = f'''(x) + g'''(x)$, etc.

Para la segunda derivada del producto de dos funciones, se tiene

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))'' &= ((f(x)g(x))')' = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))' = \\ &= f(x)g''(x) + f'(x)g'(x) + f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) = \\ &= f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x)\end{aligned}$$

Para la tercera,

$$(f(x)g(x))''' = f(x)g'''(x) + 3g''(x)f'(x) + 3f''(x)g'(x) + g(x)f'''(x)$$

Nótese la semejanza de este desarrollo con el correspondiente al binomio de Newton.

Primitivas

El lector estará ya familiarizado con determinadas funciones resultantes de derivar otras funciones. Quizás, inclusive, haya elaborado sus propias tablas de derivadas.

Ahora, se plantea el problema inverso; a saber, dada una función f, encontrar una función F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom} f$. A esta función F se le llama función *primitiva* (o *antiderivada*) de la función f.

En capítulos posteriores se estudiarán métodos para encontrar primitivas; sin embargo, en este momento podemos determinar las primitivas de algunas funciones con una tabla de derivadas. Por ejemplo, como $dx^2/dx = 2x$, entonces una primitiva de $2x$ es x^2.

Obsérvese que si una función F es primitiva de f, entonces la función $F + k$ (k constante) es también una primitiva de f. En la página siguiente se expone una tabla de primitivas, que podrá comprobarse haciendo la derivación en cada caso.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

Sea x_0 un punto fijo, y supóngase que existe $f'(x_0)$. La siguiente función de h, $df(x_0, h)$, se define como

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h \tag{5.8}$$

Esta función se conoce como la diferencial de la función f en x_0. Para cada h, se tiene que

$$f(x_0 + h) \cong f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + df(x_0, h),$$

o, lo que es igual,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \cong f'(x_0)h = df(x_0, h),$$

cuyo significado geométrico consiste en que una aproximación al valor del incremento Δf ($\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$) de la función, está dada por el cateto QS del triángulo PQS (Fig. 5.10). El error de esta aproximación lo determina QR, el cual será tanto menor cuanto más pequeño sea h.

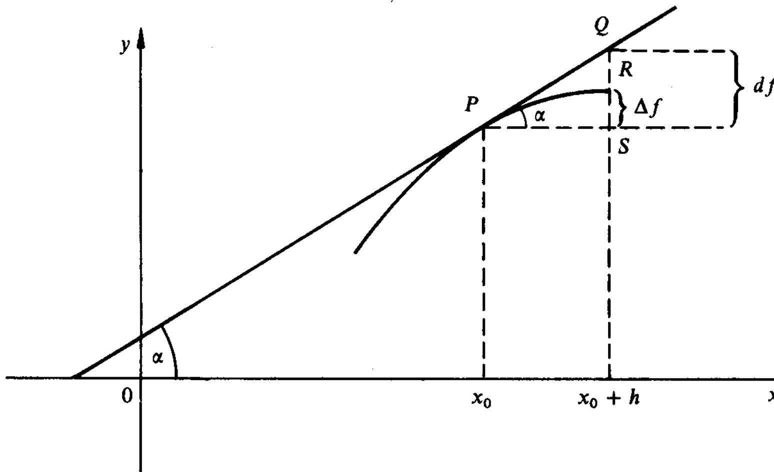


Figura 5.10

Función f	Primitiva de f
x	$\frac{x^2}{2} + k$
x^n; n entero distinto de -1	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$
cx^n; $c \in \mathbb{R}$ y n entero distinto de -1	$\frac{c}{n+1} x^{n+1} + k$
$ax^n + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ y n entero distinto de -1	$\frac{a}{n+1} x^{n+1} + bx + k$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + k$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{ang} \tan x + k$
$\sec^2 x$	$\tan x + k$
$\csc^2 x$	$-\cot x + k$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; $a \in \mathbb{R}$	$\operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{x}{a} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}$	$\operatorname{ang} \sec x + k$
$\sec x \tan x$	$\sec x + k$
$\csc x \cot x$	$-\csc x + k$

De la figura 5.10 vemos que $\tan\alpha = QS/PS$, pero, además, $f'(x_0) = \tan\alpha$, de donde

$$QS = \tan\alpha \cdot PS = \tan\alpha \cdot h = f'(x_0)\cdot h;$$

y por la ecuación [5.8], se tiene que

$$QS = df(x_0, h)$$

EJEMPLO
Calcúlese aproximadamente $\sqrt{9.18}$.

Puede considerarse, en este caso, que $x_0 = 9$ y $h = 0.18$. Por tanto, de acuerdo con lo ya estudiado, se tiene que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces,

$$\sqrt{9.18} = f(x_0 + h) \cong f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + df(x_0, h);$$

es decir,

$$\sqrt{9.18} \cong \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 0.18 = 3 + \frac{0.18}{6} = 3.03$$

El valor de $\sqrt{9.18}$, exacto hasta siete decimales, es 3.0298514, por lo que el error en nuestro cálculo es de 0.0001486; así, puede considerarse que obtuvimos una buena aproximación al valor de $\sqrt{9.18}$, no obstante que el valor de h no es muy pequeño.

Ahora se verá porqué la aproximación propuesta para Δf es buena.

Sea $h \neq 0$, entonces,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + [f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h]$$

Al dividir y multiplicar por h la diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0)$, se tiene

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\cdot h - f'(x_0)\cdot h\right];$$

sacando h como factor común, se obtiene

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right]$$

Definimos

$$Ef(x_0; h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \quad \text{si} \quad h \neq 0 \quad \text{y} \quad Ef(x_0; 0) = 0$$

Obsérvese que debido a la definición de $f'(x_0)$, se tiene

$$\lim_{h\to 0} Ef(x_0\,; h) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right) = 0;$$

por tanto, $\Delta f - df = hEf(x_0; h)$ es pequeño cuando h lo es, dado que al multiplicar dos cantidades muy pequeñas se obtiene otra más pequeña aún; por esto, en un principio utilizamos la notación

$$f(x_0 + h) \cong f(x_0) + f'(x_0)h,$$

para h pequeña.

En síntesis,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + hEf(x_0; h), \qquad [5.9]$$

donde

$$\lim_{h \to 0} Ef(x_0; h) = 0 \quad \text{y} \quad Ef(x_0; 0) = 0$$

Considérese la recta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. El número $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ es la diferencia de ordenadas de los puntos $(x, f(x))$ y $(x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ pertenecientes a las gráficas de f y la recta, respectivamente.

Por lo expuesto con anterioridad,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Es decir, las diferencias de ordenadas $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ se hacen cada vez más pequeñas conforme x se acerca a x_0. Por tanto, en la proximidad de x_0, las gráficas de la función y la recta se aproximan. Más aún, se aproximan con mayor rapidez que $x - x_0$ a 0.

Se probará que la recta antes considerada es la única con las propiedades descritas. En efecto, supóngase que la recta

$$y = b + m(x - x_0)$$

es tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - b - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \qquad [5.10]$$

Entonces,

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - b - m(x - x_0)\big) = 0;$$

por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

Pero como f es continua en x_0 por ser f derivable en x_0, se tiene que

$$b = f(x_0)$$

Si se sustituye en [5.10], se tiene

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - m,$$

por lo que

$$m = f'(x_0)$$

La regla de la cadena puede probarse mediante la igualdad [5.9].

Sean f y g funciones tales que f tiene derivada en x_0 y g tiene derivada en $f(x_0)$, entonces

$$g \circ f$$

tiene derivada en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Demostración Considérese la diferencia $(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0)$ que es, por definición,

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) \qquad [5.11]$$

Si se hace

$$u = f(x_0),$$

y

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

entonces

$$f(x_0 + h) = u + k;$$

por tanto, la ecuación [5.11] se escribe como

$$g(u + k) - g(u)$$

y por [5.9], se tiene

$$g(u + k) - g(u) = g'(u)k + kEg(u; k)$$

Al dividir entre h, se obtiene

$$\frac{(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0)}{h} = g'(u)\frac{k}{h} + \frac{k}{h}Eg(u; k), \qquad [5.12]$$

cuando $h \to 0$, resulta que

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0);$$

además, cuando $h \to 0$, entonces $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ tiende a cero, ya que f es continua en x_0.

Por tanto,

$$\lim_{h \to 0} Eg(u; k) = \lim_{k \to 0} Eg(u; k) = 0;$$

así, tomando límites en ambos lados de [5.12], se obtiene

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Razón de cambio

En física interesa calcular variaciones de ciertas cantidades respecto al tiempo. Así, por ejemplo, se habla de la velocidad promedio en que un móvil se desplaza en línea recta, en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, y se calcula como

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1},$$

donde $s(t_2)$ es la posición final del móvil, y $s(t_1)$, su posición inicial. Este cociente se conoce también como razón de cambio promedio de la posición $s(t)$ respecto a t.

El lector reconocerá este cociente como un cociente de Fermat. Por tanto, de existir el límite de esa razón cuando t_2 tiende a t_1, será la derivada de la función s respecto a t en el punto t_1. En consecuencia, esa derivada se conoce como razón de cambio instantánea de s respecto a t.

En general, cuando una cantidad y se expresa en función de otra x, la derivada dy/dx se conoce como razón de cambio instantánea de y respecto a x, aun cuando x no sea el tiempo.

Con frecuencia, la variable x mencionada en el párrafo anterior es a su vez función del tiempo t, por lo que y es también función de t. En este caso, para determinar la razón de cambio de y respecto a t, en un instante t_0, se emplea la regla de la cadena de la manera siguiente:

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = \frac{dg}{dx}(x(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0)$$

EJEMPLOS

1. *Densidad lineal.* Supóngase que a y b son extremos de una varilla rectilínea con sección transversal despreciable. Se escoge un sistema de coordenadas con el eje x conteniendo la varilla y con origen en a, entonces a cada punto P de la varilla corresponderá una abscisa x. Se llama densidad lineal en el punto $P_0(x_0)$ al límite de

$$\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$$

cuando $x \to x_0$, donde $m(x)$ es igual a la masa del segmento que une a con el punto de abscisa x.

La importancia de este concepto radica en que al conocerse la densidad lineal en cada punto pueden obtenerse aproximaciones de la cantidad de masa existente en cada porción de varilla, pues, como se recordará del concepto de la diferencial de una función, en este caso se tendrá que

$$m(x) - m(x_0) \cong m'(x_0)(x - x_0);$$

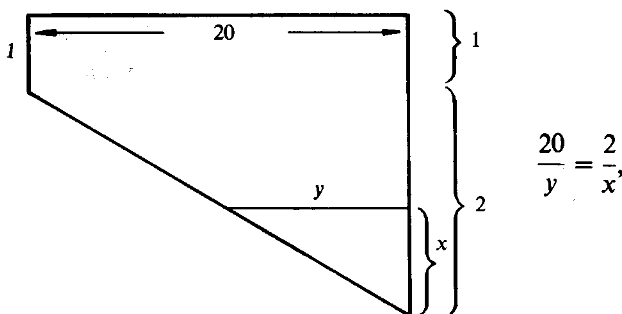
el miembro izquierdo representa la cantidad de masa del segmento determinada por x y x_0. Cuando la densidad de masa es constante, se dice que la varilla es homogénea; en caso contrario, se dice heterogénea.

Como ejemplo, considérese una varilla heterogénea de 12 cm de longitud. La masa del segmento $[a, x]$ es proporcional al cuadrado de la distancia de a a x y la densidad de masa es igual a 10 g/cm en el punto x_0 que dista 2 cm de a. Hállese la masa de toda la varilla y la densidad lineal en cualquier punto x.

Solución Se sabe que $m(x) = kx^2$; por tanto, la densidad de masa es igual a $2kx$. Así, $(4k) = 10$, de donde $k = 2.5$. En consecuencia, la masa total es $2.5(12^2) = 144 \times 2.5 = 360$. La densidad lineal en cualquier punto x es $5x$.

2. Una piscina tiene 10 m de ancho, 20 m de largo y una profundidad de 1 m en un extremo y 3 m en el otro, siendo el fondo un plano inclinado. Si se vierte agua en el interior de la piscina, a razón de 1 m^3/min, ¿a qué velocidad se eleva su nivel cuando éste es de 1 m en el extremo más profundo?

Solución Si se observa un lado de la piscina, se encuentra la siguiente relación



$$\frac{20}{y} = \frac{2}{x},$$

de donde

$$y = 10x;$$

por lo que el volumen del agua, cuando ésta se encuentra a una altura de x metros del punto más hondo de la piscina, es

$$V = (\tfrac{1}{2}10x \cdot x) \cdot 10 = 50x^2$$

Debido a que $x = x(t)$, el volumen también es función del tiempo t y

$V(x(t)) = 1 \cdot t$ si t se mide en minutos, entonces

$$\frac{dV}{dt} = 1$$

y por la regla de la cadena

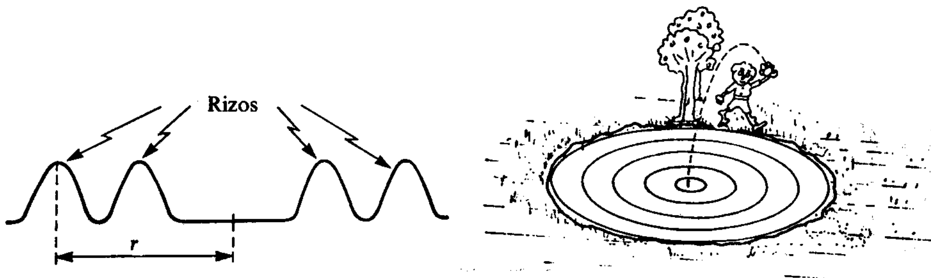
$$\frac{dV}{dt} = 100x(t) \cdot x'(t), \qquad \text{m/min.}$$

al igualar y evaluar para cuando $x(t_0) = 1$, se tiene

$$100x'(t_0) = 1,$$

de donde $x'(t_0) = 0.01$ m/min.

3. Al arrojar una piedra en un estanque, se forma y propaga lo que se conoce como «rizo» (de hecho se forman varios rizos concéntricos), según se aprecia en la figura.



Supóngase que el rizo en cuestión es perfectamente circular y se desplaza a una velocidad constante de 30 cm/s. ¿Cuál será la razón de cambio del área comprendida por el rizo circular cuando el radio de éste haya alcanzado la longitud de 1 m?

Solución Se tiene que $A = \pi r^2$, por lo que, en este caso, $r' = r'(t) = 30$ cm/s, y como r interesa cuando es igual a 100 cm, entonces

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \times 30 \times 100 = 6000\pi \text{ cm}^2/\text{s}$$

EJERCICIOS

5.1 Buscando el límite del cociente de Fermat o de Newton, si existe, para la función en cuestión, determínense las derivadas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^3$ en $x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = \dfrac{1}{2}$

c) $g(x) = x - 1$ en $x_0 = 2$

d) $g(x) = x^2 + 1$ en $x_0 = 0$

e) $h(x) = x^2 - 2x + 3$ en $x_0 = 0.25$

f) $h(x) = x(x-1)^2(x-3)^3$ en $x_0 = 0, 1$ y 3

5.2 Calcúlese la derivada de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$

b) $g(x) = 3x^2 - 17x - 2$

c) $h(x) = 6x^3 - x$

d) $h(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 2)$

e) $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^{5/2}}$

f) $f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x^3 + 3)$

g) $i(x) = \dfrac{2x^6 + 3}{13x}$

h) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 2}$

i) $l(x) = \dfrac{x^2(3 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$

j) $m(x) = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 5x\sqrt[5]{x^2}$

k) $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$

l) $h(x) = \dfrac{x^{5/2} - 3x^{3/2} + 2x^{1/3}}{x^2}$

m) $g(x) = (2x + 3)^{10/3}$

n) $h(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

o) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^5$

p) $i(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

q) $j(x) = \dfrac{(2x - 6)^{-1}}{(x^2 + 2)^{-2}}$

r) $g(x) = \dfrac{(x^{-1} + x^2)^{-1}}{(x^3 - 2x^{-2})^{-2}}$

s) $f(x) = \dfrac{(x + 4)^2}{x + 3}$

t) $h(x) = \dfrac{4x^3(2 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$

u) $e(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3$

v) $f(x) = \dfrac{(x^3 + 3x)(8x - 6)}{x^3 - 3x}$

w) $m(x) = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1 + x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1 + x^3)^5}$

x) $f(x) = (2x + 1)(3x + 2)\sqrt[3]{3x + 2}$

y) $g(x) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x})$

z) $f(x) = \dfrac{1}{2(x^2 + 2x + 3)\sqrt[3]{(x + x + 3)^2}}$

5.3 Calcúlese la derivada de las funciones siguientes:

a) $h(x) = \operatorname{sen} x + 3\cos x$

b) $f(x) = x\tan x$

c) $g(x) = 2\operatorname{sen} x\cos x$

d) $h(x) = x\operatorname{ang\,sen} x$

e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

f) $m(x) = \operatorname{ang\,sen}\sqrt{\operatorname{sen} x}$

g) $i(x) = (\operatorname{sen} x)^{100}$

h) $j(x) = (\cos x)^{99}$

i) $l(x) = x\operatorname{sen} x + \cos x$

j) $f(x) = \sqrt{\tan 2x}$

k) $g(x) = x^2\tan^2\dfrac{x}{2}$

l) $m(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{ang\,cot}\dfrac{2x}{1 - x^2}$

m) $h(x) = (1 + \operatorname{sen}^2 2x)^{1/2}$

n) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

o) $h(x) = \operatorname{sen} nx\,(\operatorname{sen}^n x)$

p) $g(x) = \dfrac{\cot \frac{x}{2}}{1 - \cot^2 \frac{x}{2}}$

q) $f(x) = \dfrac{1}{8(1 - 4\cos x)^2}$

r) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}$

s) $h(x) = \operatorname{ang\,cot} \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{3 + 5 \cos x}$

t) $g(x) = \operatorname{ang\,sen} \dfrac{x}{1 + x^2}$

u) $h(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{1}{\cos^4 x}$

v) $v(x) = \dfrac{\operatorname{ang\,cot} 3x}{1 + x^2}$

w) $f(x) = \operatorname{ang\,cos} \dfrac{x^{2n-1}}{x^{2n+1}}$

x) $f(x) = \operatorname{ang\,tan}(3 \tan x)$

y) $g(x) = \sqrt[2]{x^2 - 4} - 2 \operatorname{ang\,tan}(\frac{1}{2}\sqrt[2]{x^2 - 4})$

5.4 Encuéntrense las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas siguientes en el punto indicado:

a) $x^2 + y^2 = 1$ en $x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) La gráfica de la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$ en $(0, -1)$

5.5 Derívense las funciones siguientes hasta el orden 3.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

b) $g(x) = \operatorname{ang\,sen} x^2$

c) $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2(t - 1)}}$

d) $q(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

e) $m(x) = 2(a - x)$

f) $n(x) = \cos x\,(\operatorname{sen} 2x)$

5.6 Para cada una de las funciones siguientes, determínense los puntos donde existe su derivada y dése la regla de correspondencia de la función derivada.

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ x - 2 & \text{si } x \in (2, 3] \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \in [0, \infty) \\ -\dfrac{x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ -x^2 + 3 & \text{si } x \in (1, 3] \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \in [1, 2] \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x & \text{si } x \in (2, 3] \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

5.7 Usando el concepto de diferencial, encuéntrese un valor aproximado de lo que se indica.

a) $f(1.01)$ donde $f(x) = 2x^2 - x$
b) sen (60° 3′)
c) tan (45° 4′ 30″)
d) $\sqrt{4.003}$
e) ang tan 1.05
f) $\sqrt[3]{\frac{0.99}{1.1}}$

5.8 Demuéstrese, usando la ley de Ohm, $i = V/R$, que una pequeña variación de la intensidad de la corriente i, originada por una pequeña variación de R, puede determinarse de manera aproximada por

$$\Delta i = -\frac{i}{R}\Delta R$$

5.9 Hállese la razón de crecimiento de un triángulo equilátero cuando el lado mide 20 cm, si la longitud de cada lado crece a razón de 3 cm/min.

5.10 ¿En cuánto aumenta aproximadamente el volumen de una esfera, si su radio $r = 5$ cm se aumenta en 2 mm?

5.11 Se aplica una capa de pintura, con espesor uniforme igual a t centímetros, a las caras de un cubo con una arista de a centímetros. Utilícense diferenciales para calcular, aproximadamente, la cantidad de centímetros cúbicos de pintura empleada. Compárese este valor con el valor exacto obtenido calculando los volúmenes antes y después de aplicar la pintura.

5.12 Un tren sale de una estación en determinado momento y se dirige al Norte con una rapidez igual a 60 km/h. Un segundo tren sale de la misma estación una hora después del primero, dirigiéndose al Oeste a 50 km/h. Encuéntrese la rapidez con la que los trenes se separan dos horas y media después de la salida del segundo tren.

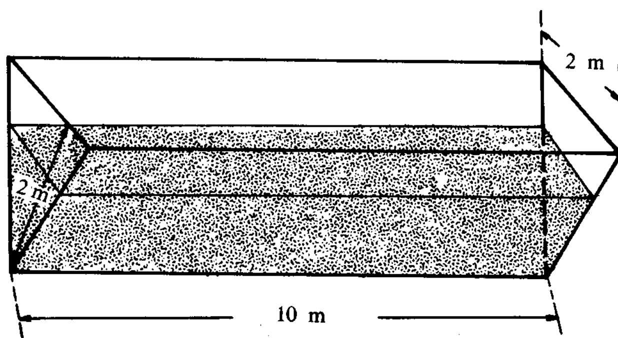
5.13 Se suelta un globo, al nivel del suelo, en cierto instante en un punto que está a 75 m de un observador situado también en el suelo. Si el globo sube en forma vertical a una velocidad de 6 m/s, ¿con qué rapidez estará alejándose del observador 20 s después?

5.14 Un globo se infla con una rapidez de 15 m^3/min. ¿A qué velocidad crece el diámetro del globo 20 min después? (Supóngase que el diámetro del globo es igual a 0 en el instante $t = 0$.)

5.15 (Problema para aficionados al béisbol.) El *Gordito* corre de la primera base a la segunda con una rapidez de 25 pies/s. ¿A qué velocidad disminuye su distancia a la tercera base en el instante en que se encuentra a 30 pies de la primera? (Recuérdese que la distancia entre las bases es de 90 pies.) ¿Con qué rapidez aumenta su distancia a «home» en el mismo instante?

5.16 Cierto individuo de 1.6 m de altura se aleja de un arbotante de 3 m de altura cuya lámpara en la parte superior está encendida. ¿Cuál es la longitud de su sombra cuando se encuentra a 1.5 m de la base del arbotante?, ¿con qué rapidez crece su sombra si se aleja del arbotante a una velocidad de 2 m/s?

5.17 Un depósito tiene 10 m de longitud con extremos en forma de triángulo isósceles, de 2 m de altura y 2 m de base (véase la figura).



Si se vierte vino en este depósito a razón de 3 m^3/min, ¿a qué velocidad sube el vino cuando la profundidad de éste es de 1 m?

5.18 Una escalera de 7 m de longitud está recargada en la pared vertical de una casa. Si su base desliza en forma horizontal, separándose de la casa con rapidez de 4 m/s, ¿a qué velocidad se desliza la parte superior de la escalera cuando la base se encuentra a 3 m de la pared?

5.19 Un hombre levanta un bote de leche hacia un andamio situado a 30 m de su cabeza, mediante una cuerda que pasa por una polea situada en el andamio. Si la cuerda mide 60 m y el hombre mantiene su extremo a la misma altura mientras camina a una velocidad de 4 m/s, alejándose del punto situado bajo la polea, ¿con qué rapidez sube el bote de leche cuando el hombre se encuentra a 20 m del punto indicado?

5.20 Un punto se mueve en la parábola $y = x^2 + 2x$. Encuéntrese el punto sobre la curva en la cual la razón de cambio de la coordenada y es cuatro veces la razón de cambio de la coord…

Pierre de Fermat

(1601 a 1665)

Nacido en Beaumont de Lomagne, tuvo como profesión la de jurista y como pasión, las matemáticas. Sus numerosos resultados han contribuido al estado actual de las matemáticas en muchas de sus ramas. En forma independiente de Descartes, descubrió el principio fundamental de la geometría analítica y se le considera un precursor importante del cálculo diferencial.

Su correspondencia con Blaise Pascal contiene los principios de la teoría de la probabilidad, considerándosele por ello fundador de esta rama de las matemáticas.

Por su afición a las matemáticas y no vivir de ellas se le conoció como el «príncipe de los aficionados». Muchos de sus resultados fueron simples notas escritas en márgenes de libros.

Al comentar el problema número 8 del segundo libro de Aritmética, *de Diofanto, que pide la solución en números racionales de la ecuación* $x^2 + y^2 = a^2$, *Fermat escribió: «...por otra parte, es imposible separar un cubo en dos cubos, una potencia cuarta en dos potencias cuartas o, en general, cualquier potencia mayor que 2 en dos potencias del mismo grado. He descubierto una prueba verdaderamente maravillosa (de este teorema) que, sin embargo, es demasiado extensa para quedar contenida en este margen.» En lenguaje moderno, este teorema conocido como «último teorema de Fermat», establece que la ecuación* $x^n + y^n = a^n$ *en la que x, y, a y n son enteros positivos, no tiene solución si n es mayor que 2. Cabe señalar que hasta la fecha este resultado no ha sido probado.*

Aunque los resultados de Fermat fueron numerosos e importantes, por su reticencia a escribir, sólo escribió un libro, publicado después de su muerte, titulado Introducción a los lugares geométricos *(1679).*

En forma paralela a la vida de Fermat se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Gracián: *El criticón,* 1651.
Optiz: *Libro de la poesía alemana,* 1624.
Vélez de Guevara: *El diablo cojuelo,* 1641.

MUSICA

Allegri: *Miserere*, 1650.
Couperin: *Libro de órgano*, 1650.

PINTURA

Jordaens: *El rey bebe*, 1637.
Le Nain: *La carreta*, 1640.
Van Dyck: *Los tres hijos de Carlos I*, 1635.
Velázquez: *La rendición de Breda*, 1634; *El primo*, 1644; *La Venus del espejo*, 1651; *Las meninas*, 1656; *Las hilanderas*, 1659.

ARQUITECTURA

Borromini: *S. Carlo allequatro fontane*, Roma, 1641; *Sant'Ivo alla sapienza*, 1650; *San Andrés del Quirinal*, 1658.

CULTURA EN GENERAL

Descartes: *Principios de la filosofía*, 1644.
Hobbs: *El leviatán*, 1651; *Elementos de filosofía*, 1658.



Pierre de Fermat



6 DIBUJO DE GRAFICAS. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

INTRODUCCION

Para trazar una gráfica, nunca se recurre sólo a la intuición, se requieren resultados sólidos que justifiquen lo que se dibuja.

Puede decirse que, en general, así se procede en matemática. Si se observa a un profesor dibujar en el pizarrón la gráfica de la función tangente (véase, por ejemplo, Fig. 6.1), se tiene la seguridad de que sabe determinar de manera analítica dónde la gráfica corta al eje x o al y, si existe algún punto donde la gráfica tenga un máximo o un mínimo, si se extiende en forma infinita y en qué sentido, en qué intervalos está definida y en cuáles otros es cóncava hacia abajo o hacia arriba, cómo se comporta la función cuando la variable crece indefinidamente...

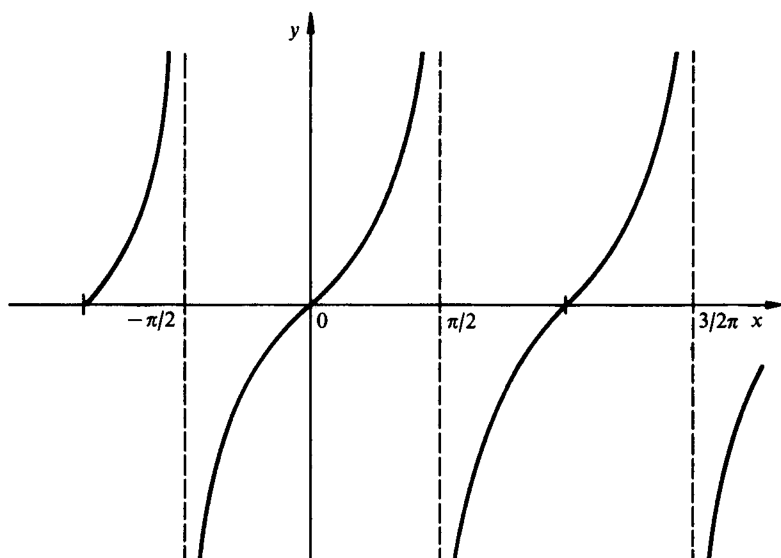


Figura 6.1

En los siguientes párrafos se analizará en qué se ha basado el profesor para hacer un dibujo tan complicado como el de la figura 6.1.

Algunos resultados importantes

En secciones anteriores se vio qué es una función creciente (y decreciente); ahora bien, al contar con el concepto de derivada de una función, se procederá a analizar la curva de una función de manera sistemática.

En términos comunes, imagínese que se toma una vara recta que desliza sobre la curva (suponiendo que esto es posible), como muestra la figura 6.2.

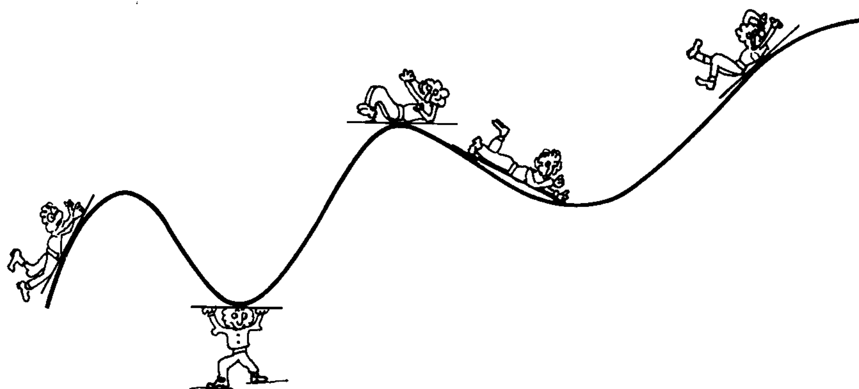


Figura 6.2

La vara mencionada ayuda a determinar cuándo la curva se dobla, cómo lo hace, si la pendiente se anula o tiende a pronunciarse; o bien, si la curva crece o decrece y en qué puntos lo hace, etc.

DEFINICION 6.1 *Supóngase que f está definida en* $[a, b]$ *y sea* $c \in [a, b]$. *Se dice, entonces, que f tiene un* máximo absoluto *en c, si resulta que* $f(c) \geqslant f(x)$ *para todo x en* $[a, b]$. *Se dice también que f* alcanza *su valor máximo absoluto en c.*

EJEMPLOS

1. Sea $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$, entonces en 1, f alcanza su valor máximo, ya que $f(1) = 1$ y, para todo x en $[0, 1]$, se tiene que $f(x) \leqslant 1$ [véase Fig. 6.3(a)].
2. Sea $h(x) = \cos x$ en $[0, \pi/2]$; en este caso, en 0 se tiene un máximo absoluto, pues para todo x en $[0, \pi/2]$ se tiene que $h(x) \leqslant 1 = h(0)$ [véase Fig. 6.3(*b*)].

Observamos que existen funciones que tienen en más de un punto un máximo absoluto, aunque como cabe esperar, el valor (máximo) de la función en cada uno de

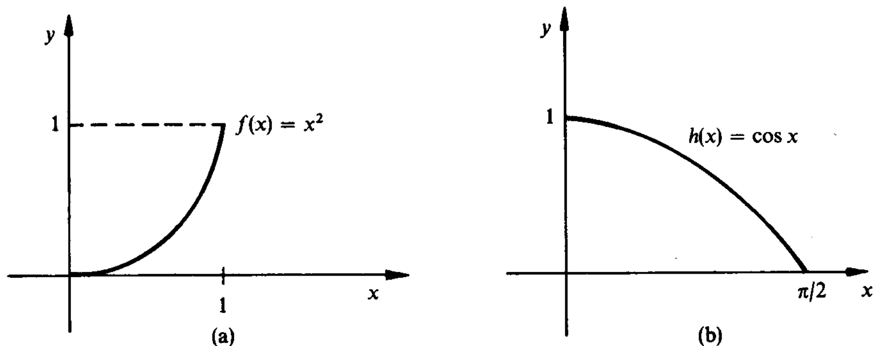


Figura 6.3

ellos es el mismo; por ejemplo, la función seno alcanza su máximo en los puntos $\{..., -\frac{5}{2}\pi, \pi/2, \frac{5}{2}\pi, ...\}$ y el valor (máximo) de la función en cada uno de ellos es igual a 1. [Véase Fig. 6.4(a).]

Considérese la situación representada en la figura 6.4(b). ¿Qué sucede en los puntos a, b y c? Resulta que si se toman vecindades de cada uno de ellos, contenidas en el intervalo (a_0, b_0) y de radio suficientemente pequeño, entonces también van a ser puntos donde la función alcanza valores máximos en tales

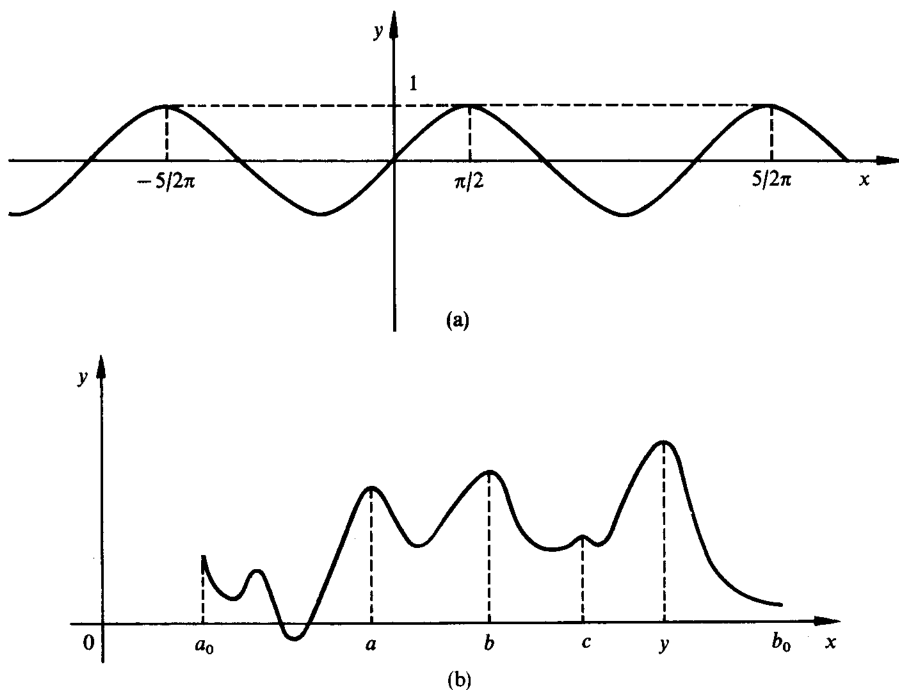


Figura 6.4

vecindades, pues $f(a) \geqslant f(x)$ para todos los puntos x de una vecindad de a; lo mismo sucede con los puntos b y c. Pero como $f(y) > f(a)$, $f(y) > f(b)$ y $f(y) > f(c)$, entonces ni en a, ni en b, ni en c ocurren máximos absolutos (en realidad, sólo y es el punto donde f alcanza el máximo absoluto); sin embargo, se dice que la función alcanza sus *máximos relativos* o *máximos locales* en esos puntos; formalmente tenemos:

DEFINICION 6.2 *Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$. Entonces f tiene un máximo relativo en c si existe una vecindad V de c tal que $f(x) \leqslant f(c)$ si $x \in V \cap [a, b]$.*

Las definiciones de mínimo relativo y mínimo absoluto pueden establecerse en forma semejante.

Es claro que si $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ tiene un máximo o un mínimo absoluto en c, entonces c tiene un máximo local o un mínimo local, respectivamente.

Al hablar de máximos (mínimos), nos referimos indistintamente a valores relativos o absolutos, siempre y cuando queden claros en el contexto; en caso contrario, se especificará de qué se trata. Así mismo, los valores máximos y mínimos se conocen como *valores extremos* de f. Si los valores máximos o mínimos son absolutos, se dice que los valores extremos son absolutos.

$f'(c) = 0$ significa que la pendiente de la recta tangente a la curva de la función f, en el punto c, es horizontal. El punto c se conoce, en este caso, como *punto crítico* de la función f (Fig. 6.5).

EJEMPLOS

1. Encuéntrense los puntos críticos de $y = x^2 - 1$.
   Solución La derivada de la función dada es $y' = 2x$, la cual se anula sólo en $x = 0$; entonces, de acuerdo con la definición 6.1, sólo hay un punto crítico, y es el origen.

2. Encuéntrense los puntos críticos de $y = 3x^3 - 3x + 1$.
   Solución La derivada es $y' = 9x - 3$ y se anula en $x_1 = 1/\sqrt{3}$ y $x_2 = -1/\sqrt{3}$. Por tanto, estos son los puntos críticos.

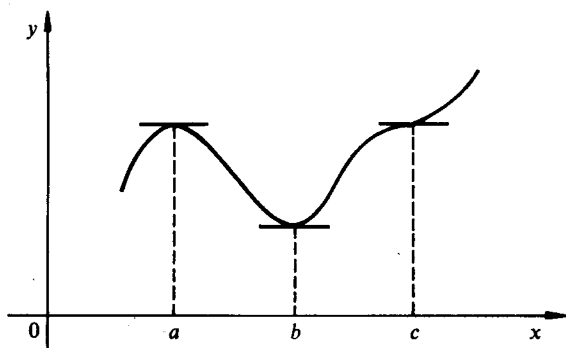


Figura 6.5

TEOREMA 6.1 Sea f una función derivable en (a, b). Sea $c \in (a, b)$ un punto donde f alcanza un máximo (mínimo) relativo. Entonces $f'(c) = 0$, es decir, c es un punto crítico de f.

Demostración

Sea h un número suficientemente pequeño tal que $c + h \in (a, b)$. Supóngase que $h > 0$; entonces, por ser c un punto donde f alcanza un máximo relativo, se tiene que

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

De este modo $f(c + h) - f(c) \leqslant 0$ y, así,

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Por tanto,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Ahora, si $h < 0$, entonces $f(c + h) - f(c) \leqslant 0$, por lo que

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0,$$

y, así,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ambos límites deben ser iguales, pues f es derivable en c. Pero para que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

se requiere, por lo anterior, que ambos sean iguales a cero; por consiguiente, $f'(c) = 0$.

Si c es un punto donde f alcanza un mínimo relativo, entonces la prueba es análoga a la anterior.

EJEMPLOS

1. Hállense los máximos y los mínimos de la función $y = 2x^2 + 4$.
   Solución En este caso se tiene un sólo punto crítico: 0; además, para todo valor de x, $f(0) \leqslant f(x)$; por tanto, 0 es un punto donde la función alcanza su mínimo absoluto, y el valor de éste es 4. Por otra parte, la función no tiene máximo relativo en ningún punto.

2. Hállense los máximos y los mínimos de la función $y = x^3 - x$.

Solución Los puntos críticos son $x_1 = -1/\sqrt{3}$ y $x_2 = 1/\sqrt{3}$. Probaremos que en $-1/\sqrt{3}$, f alcanza un valor máximo. Se tiene que $f(-1/\sqrt{3}) = 2/3\sqrt{3}$, y consideraremos una vecindad V con centro en $-1/\sqrt{3}$ y de radio $\sqrt{3}$. Cualquier $x \in V$ puede escribirse como $-1/\sqrt{3} + h$, donde $|h| < \sqrt{3}$. Calculemos $f(x)$ en $x_1 + h = -1/\sqrt{3} + h$,

$$f(x_1 + h) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + h\right)\left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}h + h^2\right) =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)h^2 + h^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} + (h - \sqrt{3})h^2$$

Como $h \leqslant |h| < \sqrt{3}$, se sigue que $h - \sqrt{3} < 0$. Por tanto,

$$f(x) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Procediendo en forma análoga, se prueba que en $x_2 = 1/\sqrt{3}$, la función f alcanza un valor mínimo (Fig. 6.6).

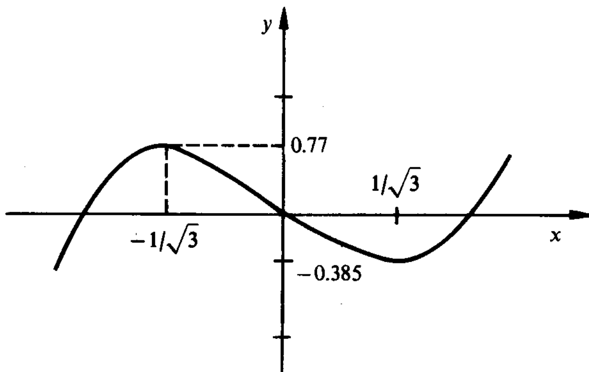


Figura 6.6

Para los siguientes teoremas (de suma importancia, como se verá más adelante) se requiere el resultado siguiente, cuya demostración aparece en la página 288.

TEOREMA 6.2 Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f alcanza su valor máximo absoluto y su valor mínimo absoluto en ese intervalo.

Es fundamental que el intervalo sea cerrado, pues, en caso contrario, la función puede ser continua en un intervalo y, sin embargo, no tener máximo ni mínimo absolutos. Por ejemplo, si se considera la función tangente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, se observa que no tiene valores extremos en ese intervalo.

Lo mismo ocurre con la función $f(x) = 1/x$ definida en el intervalo $(0, \infty)$. [Véase Fig. 6.7(b).]

PROPOSICION 6.1 Sea f una función derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$; entonces, f alcanza sus valores extremos absolutos en los extremos de $[a, b]$ o en un punto crítico de (a, b).

Prueba En efecto, por el teorema 6.2, f alcanza sus valores extremos absolutos en algunos puntos de $[a, b]$; si dichos puntos pertenecen a (a, b), del teorema 6.1 se sigue que tales puntos deben ser críticos. En caso contrario, tendrán que ser alguno de los extremos del intervalo.

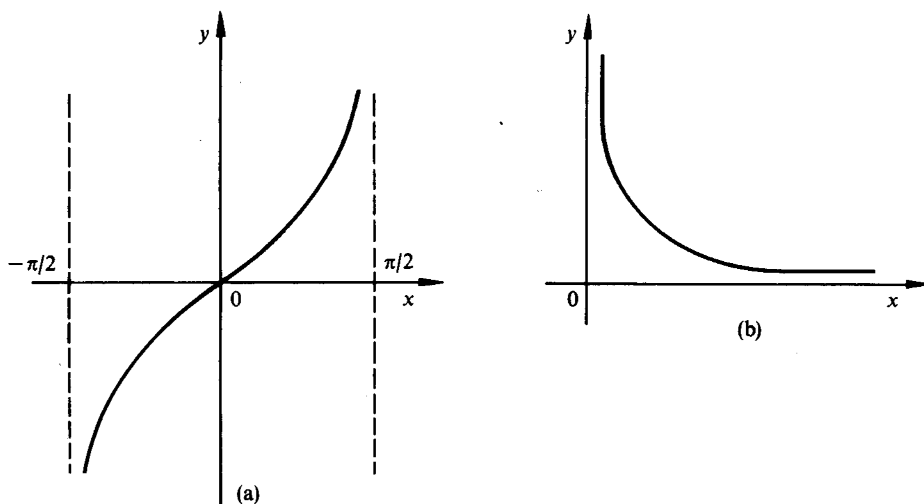


Figura 6.7

Criterio operacional

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b). Para determinar en qué puntos f alcanza sus valores extremos absolutos, procédase de la manera siguiente:

1. Determínense los puntos críticos de f en (a, b).
2. Calcúlese el valor de f en cada punto crítico, en a y en b.
3. Determínese en cuál o cuáles de estos puntos alcanza f el valor más pequeño y en cuál o cuáles el más grande.
4. En el primer caso, se tratará de puntos donde f alcanza su mínimo; en el otro, de puntos donde f alcanza su valor máximo (en ambos casos se trata de valores extremos absolutos).

TEOREMA 6.3 *(Teorema de Rolle.)* Sea f una función continua en $[a, b]$ que es derivable en (a, b) y supóngase que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración

Si f es una función constante, entonces su derivada es igual a cero y, así, c puede ser cualquier punto del intervalo.

Si la función no es constante, entonces existe algún punto donde es distinta de cero (por hipótesis, este punto no puede ser ninguno de los dos extremos del intervalo). Puede suponerse que la función tiene algún valor positivo; por el teorema 6.2, la función alcanza su valor máximo en algún punto del intervalo $[a, b]$, que designamos por c; entonces, $f(c)$ debe ser mayor que cero y, por consiguiente, $c \in (a, b)$. Por el teorema 6.1, se concluye que $f'(c) = 0$.

Si la función es negativa en el intervalo dado, entonces alcanza su valor mínimo en (a, b). Por el teorema 6.1, $f'(c) = 0$ (Fig. 6.8).

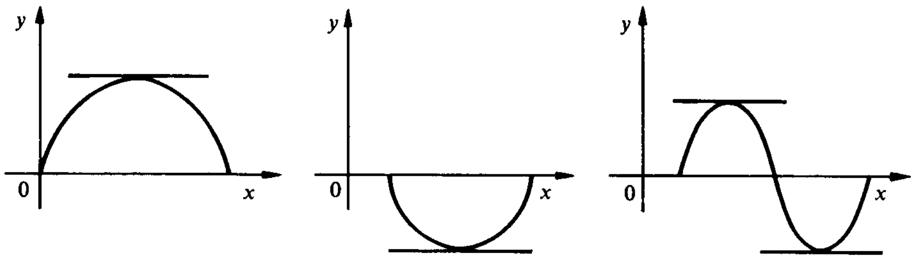


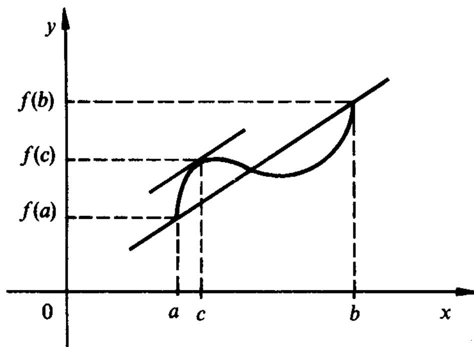
Figura 6.8

El teorema del valor medio para derivadas*

Teorema del valor medio. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

A continuación se ilustra este teorema en forma gráfica.



* Al final del capítulo se presentarán dos generalizaciones de este teorema.

Obsérvese que el teorema afirma la existencia de un punto $c \in (a, b)$, donde la pendiente de la recta tangente a la curva de la función f en ese punto es igual a la pendiente de la recta que une los extremos, cuyas coordenadas son $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Demostración

La idea de la demostración es considerar para cada $x \in [a, b]$ la diferencia de la ordenada $f(x)$ del punto $(x, f(x))$ de la gráfica de la función f y la ordenada y del punto (x, y) localizada en la recta que pasa por los puntos, cuyas coordenadas son $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Así, la ecuación de la recta que pasa por los puntos mencionados es

$$y - f(a) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{pendiente de la recta}}(x - a)$$

Llámese $g(x)$ a la diferencia mencionada en la idea de la demostración; por tanto,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Así,

$$g(a) = g(b) = 0$$

Por la manera de definir $g(x)$, se observa, además, que es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Por tanto, es posible aplicar el teorema de Rolle a la función g; con esto se sabe que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Pero como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

se tiene que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Al despejar se obtiene finalmente el resultado enunciado.

COROLARIO 6.1 Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si la función f' existe y se anula en cada $x \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$.

Demostración

Sea $x_0 \in (a, b]$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(x_0) - f(a) = f'(c)(x_0 - a)$$

Pero f' se anula en todo (a, b), luego $f(x_0) - f(a) = 0$; por tanto, $f(x_0) = f(a)$. Como x_0 es un punto arbitrario de $(a, b]$ se infiere el aserto.

El recíproco de este corolario se demostró al ver las propiedades de la derivada. Es decir, si $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ es constante, entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

EJEMPLO

Sea $f(x) = x^2 + 2x$. Hállense los números $c \in (1, 2)$ para los cuales

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

Solución La función discutida cumple con la hipótesis del teorema del valor medio y, además,

$$\begin{gathered} f'(x) = 2x + 2 \\ f(2) = 8 \quad \text{y} \quad f(1) = 3 \end{gathered} \qquad [6.1]$$

De este modo,

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5}{1} = 5;$$

hágase $f'(c) = 5$; entonces, por [6.1], se tiene que $2c + 2 = 5$. De donde

$$c = \tfrac{3}{2}$$

Cómo ver que una función crece (decrece)

En secciones anteriores se definió la función creciente y decreciente; ahora, a través del teorema del valor medio se relacionarán estos conceptos con el de la derivada.

TEOREMA 6.4 Sea f una función que es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

Demostración

Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $x_1 < x_2$; entonces, por el teorema del valor medio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f'(c) > 0$. Por tanto, como $x_2 - x_1 > 0$, se tiene que $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ y, así, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, por lo que $f(x_2) > f(x_1)$.

Esto implica que la función es estrictamente creciente.

Cuando $f'(x) < 0$, se procede de manera semejante a la descrita.
Si la derivada $f'(c) \geqslant 0$ en (a, b), entonces f es creciente.
Si la derivada $f'(c) \leqslant 0$ en (a, b), entonces f es decreciente.

EJEMPLOS

1. La función $f(x) = 2x^2 + 3$ tiene por derivada a $f'(x) = 4x$.
   Así, $f'(x) > 0$ para $x > 0$; por tanto, la función f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. Así mismo, $f'(x) < 0$ para $x < 0$; en consecuencia, f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$. Esto es, el teorema anterior permite determinar intervalos, en ciertos casos, donde la función crece o decrece.

2. Pruébese que $\operatorname{sen} x \leqslant x$ para $x \geqslant 0$.
   Sea $h(x) = x - \operatorname{sen} x$; por tanto, se tiene

$$h(0) = 0 - \operatorname{sen} 0 = 0$$

   Además, $h'(x) = 1 - \cos x$. Pero en secciones anteriores vimos que $\cos x \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; y, por el teorema demostrado, h es creciente en $\mathbb{R}$, por lo que $h(x) \geqslant h(0) \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$.
   Esto indica que $\operatorname{sen} x \leqslant x$ para todo $x \geqslant 0$.

El siguiente corolario es útil, pues proporciona otro criterio para determinar cuándo una función es creciente o decreciente.

COROLARIO 6.2 Sea f una función cuya derivada f' es continua en un intervalo (a, b). Si $f' > 0 (f' < 0)$ en algún punto de (a, b) y, además, no se anula en ningún punto de (a, b), entonces f es estrictamente creciente en (a, b) [f es estrictamente decreciente en (a, b)]. Las mismas conclusiones se tienen para $[a, b]$ si, además, se pide que f sea continua en $[a, b]$.

Demostración
Por el teorema del valor intermedio se tiene que la función f' es positiva en todo punto de (a, b); por el teorema anterior, resulta que f es estrictamente creciente.

EJEMPLO
Determínese en qué intervalos crece o decrece la función

$$f(x) = x^2 - x + 5$$

Solución La derivada de la función dada es

$$f'(x) = 2x - 1$$

Así f' es continua y $f'(x) = 0$ sólo en el punto $x = \frac{1}{2}$; por el teorema del valor intermedio se observa que el signo de la derivada no

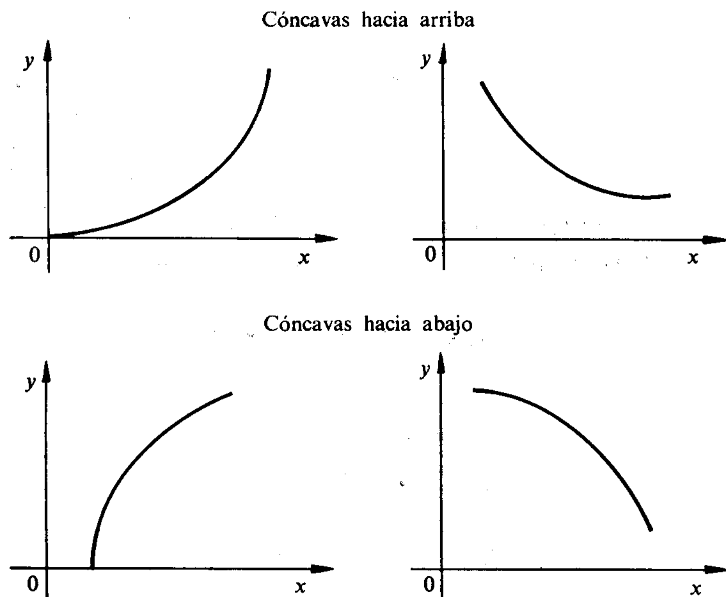


Figura 6.9

infiere que f es cóncava hacia arriba en (a, b). El inciso b) se demuestra en forma análoga.

TEOREMA 6.6 Sea f una función derivable en (a, b).
1) Si $f'(x_0) = 0$ y f es cóncava hacia abajo en (a, b), entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
2) Si $f'(x_0) = 0$ y f es cóncava hacia arriba en (a, b), entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Demostración

1) Si f es cóncava hacia abajo en (a, b), resulta que, según la definición 6.4, f' es decreciente en el intervalo (a, b); es decir, $f'(x) > f'(x_0) > f'(x')$ para $x \in [a_0, x_0]$, $x' \in [x_0, b_0]$, donde a_0 y b_0 son tales que $a < a_0 < x_0 < b_0 < b$.

Pero, como $f'(x_0) = 0$, entonces

$$\text{a)} \quad f'(x) > 0 \qquad \text{y} \qquad \text{b)} \quad f'(x') < 0;$$

por lo que a) y el teorema 6.4 implican que la función es creciente en $[a_0, x_0]$. Además, b) y el mismo teorema señalan que la función es decreciente en $[x_0, b_0]$; o sea, en una vecindad V de x_0 contenida en (a, b), se tiene $f(x) \leqslant$ $\leqslant f(x_0)$ si $x \in V$.

2) Para este inciso se procede igual que para 1).

A menudo se recurre al siguiente criterio, que es una reformulación del teorema recién demostrado.

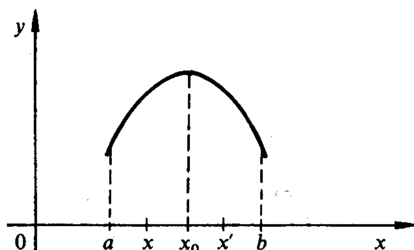


Figura 6.10

Criterio de la primera derivada para determinar máximos y mínimos

Sea f derivable en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$.
1) Si $f'(x)$ es positiva para todo $x \in (a, x_0)$ y $f'(x)$ es negativa para $x \in (x_0, b)$, entonces x_0 es un punto donde la función alcanza un máximo absoluto en (a, b).
2) Si $f'(x)$ es negativa para todo $x \in (a, x_0)$ y $f'(x)$ es positiva para $x \in (x_0, b)$, entonces x_0 es un punto donde la función alcanza un mínimo absoluto en (a, b).

Demostración
1) Por el teorema 6.4 se sigue que f es estrictamente creciente en $(a, x_0]$ y estrictamente decreciente en $[x_0, b)$. Por tanto, $f(x) < f(x_0)$ en $(a, x_0]$ y $f(x_0) >$ $> f(x)$ en $[x_0, b)$. En resumen, $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in (a, b)$.
2) Este inciso se prueba de manera semejante.

TEOREMA 6.7 *(Criterio de la segunda derivada.)* Sea f una función doblemente derivable* en $c \in (a, b)$.
1) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c.
2) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

Demostración
1) $f''(c) < 0$, implica que

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0;$$

por tanto, para x suficientemente próximo a c y $x < c$, se tiene

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0;$$

como $x - c < 0$, se concluye que

$$f'(x) > f'(c);$$

* De acuerdo con nuestras definiciones, pedir que f sea doblemente derivable en c, implica que f' existe en una vecindad de c.

pero, por hipótesis, $f'(c) = 0$; por tanto, $f'(x) > 0$ en un intervalo $(x_0, c]$; de manera análoga, $f'(x) < 0$ en un intervalo $[c, x_1)$; por lo expuesto en el criterio de la primera derivada, se concluye la afirmación del inciso 1).

2) Para probar este inciso se procede en forma semejante.

El que la pendiente de la recta tangente a una curva se anule, no implica necesariamente que la curva tiene un máximo o un mínimo. Considérese la gráfica de la función $y = x^3$ (Fig. 6.11).

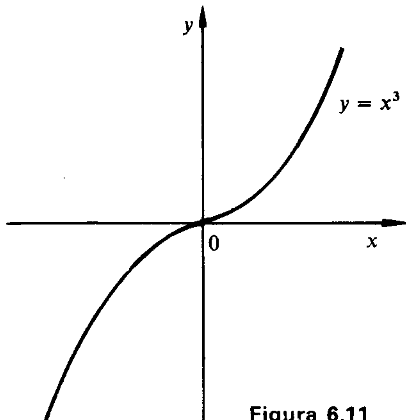


Figura 6.11

Aquí, la tangente en el origen tiene pendiente nula y, sin embargo, no existe ningún punto en $\mathbb{R}$ donde la función alcance un máximo o un mínimo.

DEFINICION 6.4 *Un* punto de inflexión *de una función f es aquel en el cual f' tiene un máximo o un mínimo.*

Por ejemplo, si se toma la función $y = x^3$ se observa que su función derivada es $y' = 3x^2$, con un valor mínimo en el origen; esto puede comprobarse con facilidad por los resultados obtenidos. Por tanto, la función $y = x^3$ tiene un punto de inflexión en el origen (Fig. 6.11).

La concavidad de una curva cambia en un punto de inflexión, como se ilustra en las gráficas de la figura 6.12.

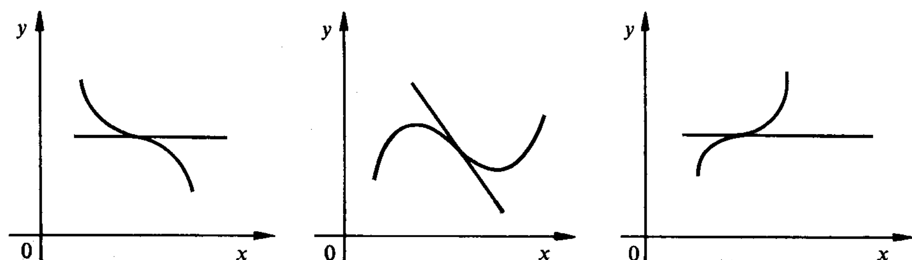


Figura 6.12

Pasos a seguir para dibujar la gráfica de una función

1 Búsquense las intersecciones con los ejes de coordenadas.
2 Véase en qué puntos la función es continua.
3 Determínense los puntos críticos.
4 Hállense los intervalos donde la función crece o decrece.
5 Determínense los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de la función, y analícese la concavidad de la curva.
6 Establézcanse las discontinuidades, si existen, de la función, y calcúlense, en su caso, los límites laterales (finitos o infinitos) en esos puntos de discontinuidad.
7 Analícense los límites al infinito de la función, si es que está definida en un intervalo infinito.
8 Determínense las asíntotas.

EJEMPLOS

1. Dibújese la gráfica de la función

$$g(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

1 $g(x) = 0$ sólo para $x = 0$. Es decir, g corta a los ejes sólo en el origen.

2 Como g es el cociente de dos funciones continuas en $\mathbb{R}$, se tiene que g es continua en su dominio $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

3 La derivada de g es

$$g'(x) = \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x^2-1}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

y se anula sólo en $x = -1$.

4 $g'(x)$ es negativa si $|x| > 1$ y positiva si $|x| < 1$. Por tanto, g es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ y estrictamente creciente en $[-1, 1)$.

5 Como

$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x + 4}{(x-1)^6} = 2\frac{x^2+x-2}{(x-1)^5} = 2\frac{x+2}{(x-1)^4}$$

es positiva en $x = -1$, concluimos que, en ese punto, f tiene un mínimo.

El único punto crítico de la función $g'(x)$ es $x = -2$ y, como $g''(x) < 0$ si $x < -2$ y $g''(x) > 0$ si $x > -2$, se concluye que $g'(x)$ tiene un máximo en $x = -2$; por tanto, en ese punto f tiene un punto de inflexió: Por otra parte, en $(-\infty, -2]$, $g'(x)$ es decreciente [ya que ahí $g''(x) < 0$] y en $[-2, 1) \cup \cup (1, \infty)$, $g'(x)$ es creciente. Así, g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2]$ y cóncava hacia arriba en $[-2, 1) \cup (1, \infty)$.

6 $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \infty$.

7 $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} g(x)$.

8 De acuerdo con el paso 6, se tiene que $x = 1$ es una asíntota vertical de la gráfica de g. Para determinar si tiene asíntotas no verticales, calcúlese

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{(x-1)^2}}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x}{(x-1)^2}}{x}$$

Ambos límites son iguales a cero y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0,$$

según el paso 7. Así, la recta $y = 0$ es una asíntota de la gráfica de g.

Por lo anterior, la gráfica resulta ser

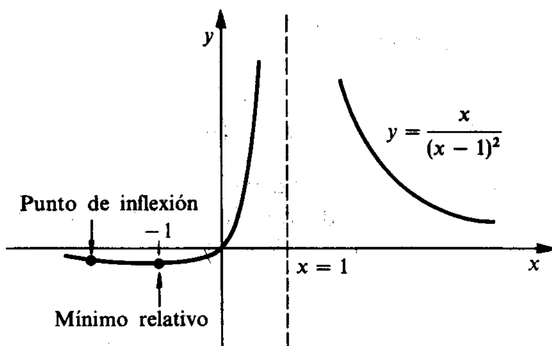


Figura 6.13

2. Dibújese la gráfica de la función $y = f(x) = x + \operatorname{sen} x$.

1 Si $x = 0$, entonces $y = 0$; de esta manera, la gráfica pasa por el origen.

Para ver en qué punto la gráfica corta al eje x, se escribe

$$x + \operatorname{sen} x = 0$$

Esta ecuación es satisfecha por $x = 0$ y sólo por este punto, pues, como se probará en el paso 4, la función es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva. En consecuencia, la gráfica cortará a los ejes sólo en el origen.

2 Tanto la función x como la función $\operatorname{sen} x$ son continuas en $\mathbb{R}$, y como la suma de funciones continuas es continua, se tiene que f es continua en $\mathbb{R}$.

3 Al derivar, resulta

$$f'(x) = 1 + \cos x;$$

al igualar a cero, se obtiene

$$1 = -\cos x,$$

por lo que

$$x = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

4 Por el paso 3, se tiene que

$$f'(x) = 1 + \cos x;$$

por tanto, $f'(x) \geqslant 0$, dándose la igualdad sólo en $x = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Así, f es estrictamente creciente en cada intervalo de la forma $[(2n + 1)\pi, (2n + 3)\pi]$, con $n \geqslant 0$, y en aquellos de la forma $[(2n + 3)\pi, (2n + 1)\pi]$, con $n < 0$. Por ello, f es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$.

5 No existen valores extremos, dado que la función es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$; para calcular los puntos de inflexión considérese la segunda derivada de f, es decir,

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x,$$

que tiene como raíces $x = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.

La tercera derivada calculada en estos puntos es distinta de cero; por tanto, la función tiene un punto de inflexión en cada uno de ellos.

Para analizar la concavidad, considérense intervalos de la forma

$$[2n\pi, (2n + 1)\pi] \quad \text{o} \quad [(2n + 1)\pi, 2(n + 1)\pi]$$

En el primer caso, se tiene $f''(x) < 0$, por lo que $f'(x)$ es decreciente y, así, f es cóncava hacia abajo en esos intervalos; en el segundo, $f''(x) > 0$, por lo que $f'(x)$ es creciente y, así, f es cóncava hacia arriba en esos intervalos.

6 No hay puntos de discontinuidad.

7 $\lim\limits_{x \to \infty} (x + \operatorname{sen} x) = \infty, \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (x + \operatorname{sen} x) = -\infty$

dado que $x + \operatorname{sen} x > x - 1$ y $x + \operatorname{sen} x \leqslant x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8 La función no tiene asíntotas verticales, pues f es continua en todo $\mathbb{R}$. Tampoco existen asíntotas no verticales, dado que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

ya que

$$0 \leqslant \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{|x|};$$

por otra parte,

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x,$$

y este límite no existe porque los valores de la función oscilan entre 1 y -1 cuando x tiende a ∞. En forma análoga,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} x,$$

tampoco existe.

Con todo lo anterior, la gráfica se ve así:

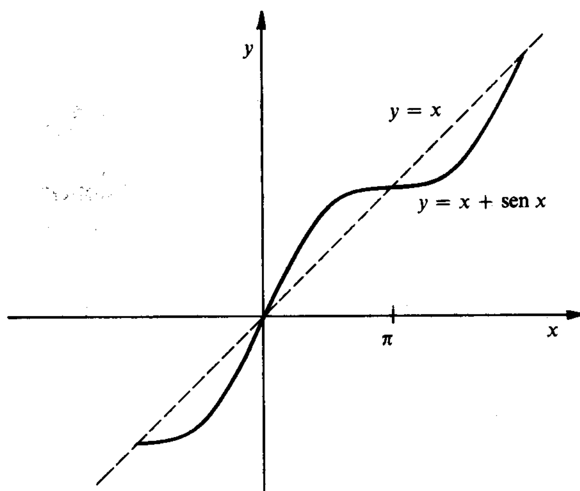


Figura 6.14

PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS PLANTEADOS CON PALABRAS

A continuación se muestran aplicaciones de una parte del material estudiado, cuyo planteamiento y solución correctos dependerán de la habilidad que el lector logre adquirir. Por este motivo, se recomienda resolver muchos problemas, como los mostrados en la sección de ejercicios de este capítulo.

1. PEMEX desea adquirir envases cilíndricos circulares (véase Fig. 6.15) con capacidad de 5 l, para envasar aceite, y requiere que la capacidad de hoja de lata empleada en su fabricación sea mínima para abatir costos de producción. ¿Cuáles tendrán que ser las dimensiones de los envases?
Solución El cilindro será de radio r y altura h. La cantidad de hoja de lata que se utilizará coincide con la superficie total del cilindro, más la superficie de las dos tapas; es decir,

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad \textbf{[6.2]}$$

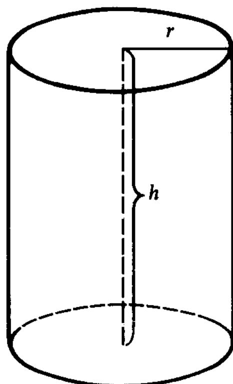


Figura 6.15

Por otra parte, el volumen de este cilindro deberá ser igual a 5 l. Ahora, como h y r se medirán en decímetros y, además, 1 litro = 1 decímetro cúbico, entonces

$$\pi r^2 h = 5\text{dm}^3;$$

al despejar h y sustituir en [6.2], se tiene

$$S = \frac{10}{r} + 2\pi r^2$$

Obsérvese que la superficie es función sólo de la variable r, y el problema requiere encontrar el valor mínimo de esta función. Así,

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{10}{r^2} + 4\pi r;$$

si se iguala a cero, resulta

$$-10 + 4\pi r^3 = 0,$$

por lo que

$$r_0 = \left(\frac{5}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Calcúlese ahora la segunda derivada de S,

$$\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{20}{r^3} + 4\pi = \frac{20 + 4\pi r^3}{r^3}$$

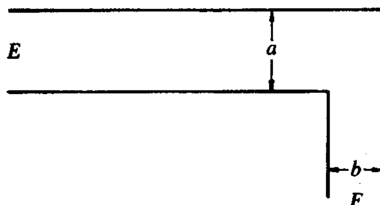
Como $r_0 > 0$, entonces $d^2S/dr^2 > 0$ en r_0; por tanto, para este valor r_0, se tiene un mínimo. Así, las dimensiones son

$$r_0 = \left(\frac{5}{2\pi}\right)^{1/3} \text{dm},$$

y

$$h = \frac{5}{\pi\left[\frac{25}{4\pi^2}\right]^{1/3}} \text{dm}$$

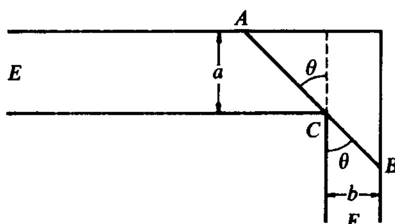
2. En un local situado en el extremo E del pasillo de un edificio, cuyas dimensiones se indican en la figura, se desea construir muebles mediante el uso de tablas. El proveedor que entregará el material en el extremo F del pasillo recibe la solicitud de tablas que tengan la longitud máxima que permita su transportación por todo el pasillo. ¿Cuál es esa longitud?



Nota Se supone que las tablas serán transportadas en forma paralela en relación al suelo.

Solución La longitud buscada coincide con la del segmento mínimo $\overline{AB}$ que toca la esquina y las paredes exteriores. Cada uno de los segmentos que componen $\overline{AB}$ mide

$$AC = a \sec \theta$$
$$CB = b \csc \theta$$



Entonces, el problema consiste en minimizar la función

$$AB = AC + CB = a \sec\theta + b \csc\theta$$

Para esto, la longitud de $\overline{AB}$ se deriva respecto a θ, es decir,

$$\frac{dAB}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a \sec\theta + b \csc\theta) = a \sec\theta \tan\theta - b \csc\theta \cot\theta;$$

al igualar a cero, se tiene

$$\frac{dAB}{d\theta} = 0, \quad \text{lo que implica} \quad a \operatorname{sen}^3\theta = b \cos^3\theta;$$

de donde $\tan\theta = \sqrt[3]{b/a}$; o sea $\theta_0 = \text{ang}\tan\sqrt[3]{b/a}$ es la solución de la ecuación $dAB/d\theta = 0$.

Obsérvese que las condiciones del problema indican que θ varía entre 0 y $\pi/2$. Calcúlese la segunda derivada

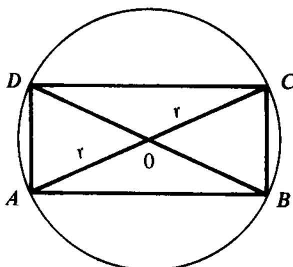
$$\frac{d^2AB}{d\theta^2} = a[(\sec\theta + \tan\theta)\tan\theta + \sec^3\theta] + b[(\csc\theta\cot\theta)\cot\theta + \csc^3\theta],$$

por lo que

$$\frac{d^2AB}{d\theta^2} > 0 \quad \text{en} \quad \theta_0 = \text{ang}\tan\sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

y, así, para este valor de θ_0, AB resulta ser la longitud del segmento de recta buscada. Es decir, el valor buscado es $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

3. Se pretende recortar un disco de radio r para obtener un rectángulo cuya área sea máxima. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
Solución Los cuatro vértices deben estar sobre la circunferencia; véase la figura.



Como los ángulos A y B son de 90°, las cuerdas BD y AC son diámetros y, por consiguiente, su punto de intersección O es el centro del círculo.

Llámese a y b a las longitudes de los lados del rectángulo inscrito.

Por tanto, el área es ab. Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo ABC, se obtiene

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Al sustituir en la fórmula correspondiente al área del rectángulo, obtenemos ésta como función de a, de acuerdo con la regla siguiente:

$$A(a) = \text{Area} = a\sqrt{4r^2 - a^2}$$

Así, el problema planteado se resuelve al encontrar el valor de a para el cual la función A alcanza su valor máximo.

$$A'(a) = \sqrt{4r^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

Si se iguala a cero, se tiene

$$4r^2 - a^2 - a^2 = 0,$$

y, por tanto, $a_0 = \sqrt{2}r$ es la única solución positiva de la ecuación.

De la misma forma

$$b_0 = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{2}r$$

Al calcular la segunda derivada, se observa que

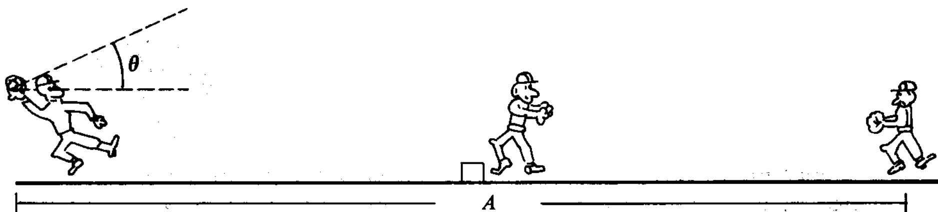
$$A''(\sqrt{2}r) < 0;$$

por esto, en $a_0 = \sqrt{2}r$ se tiene un máximo para A. Así se encuentra que el rectángulo buscado es el cuadrado de lado $\sqrt{2}r$.

4. Babe Ruth arroja una pelota con determinada fuerza y el alcance de su tiro está gobernado por la fórmula

$$A = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g},$$

donde v_0 es la velocidad inicial con la cual arroja la pelota; g, la aceleración de la gravedad, y θ, el ángulo de inclinación al lanzar la pelota (véase la figura).



¿Cómo debe ser θ para que el alcance A sea máximo?

Solución A es una función del ángulo θ; por las condiciones del problema, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g}$$

Al igualar a cero para hallar los puntos críticos de la función A, resulta

$$\frac{dA}{d\theta} = 0 = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g};$$

de lo cual se obtiene que $\theta_0 = \pi/4$ es un punto crítico.

Con objeto de aplicar el método de la segunda derivada, derívese la función $dA/d\theta$; así,

$$\frac{d^2A}{d\theta^2} = -\frac{4v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g};$$

al evaluar esta última expresión en $\theta_0 = \pi/4$, se tiene que

$$\frac{d^2A}{d\theta^2}(\theta_0) = -\frac{4v_0^2}{g} < 0$$

De esto se infiere que en $\theta_0 = \pi/4$ la función $A = A(\theta)$ alcanza su valor máximo, que es igual a v_0^2/g.

Por tanto, Babe Ruth debe arrojar la pelota con una inclinación de 45° para sacar *out* con el menor esfuerzo.

UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO. TEOREMA DE CAUCHY

La presente generalización del teorema del valor medio, debida a A. L. Cauchy, tiene diversas aplicaciones mediante la regla de L'Hôpital.

Teorema del valor medio (Cauchy). Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

Demostración

Sea

$$h(t) = [f(b) - f(a)][g(t) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(t) - f(a)]$$

Entonces $h(t)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $h(a) = h(b) = 0$. Para probar el teorema, sólo es necesario demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, pero esto se sigue del teorema de Rolle.

LA REGLA DE L'HÔPITAL Y LA FORMA INDETERMINADA 0/0

TEOREMA 6.8 Sean f y g derivables en (a, b) y $g'(x) > 0\,(<0)$ para todo $x \in (a, b)$.

Supóngase que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$$

y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

Entonces,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

(el teorema también es válido cuando se sustituye a^+ por b^-).

Demostración

Supóngase que $g'(x) > 0$ para todo $x \in (a. b)$. Entonces g es estrictamente creciente en (a, b).

Se sabe que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$$

Por definición de límite, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$c - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < c + \varepsilon,$$

si $a < x < a + \delta < b$.

Sea y un punto tal que $a < y < x < a + \delta$, entonces, por el teorema del valor medio (Cauchy), existe $t \in (y, x)$ tal que

$$c - \varepsilon < \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < c + \varepsilon$$

[los dos cocientes tienen sentido, ya que g es estrictamente creciente y g' no se anula en (a, b)].

Al hacer tender y a a, resulta, por la segunda parte de la hipótesis, que

$$c - \varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant c + \varepsilon,$$

para todo $x \in (a, a + \delta)$, de donde

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Cuando $g'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, se procede de igual forma para demostrar el teorema.

LA REGLA DE L'HÔPITAL Y LA FORMA INDETERMINADA 0/0 CUANDO LA VARIABLE CRECE INDEFINIDAMENTE

TEOREMA 6.9 Supóngase que $f'(x)$ y $g'(x)$ están definidas para todo $x > M$, para algún $M > 0$, y que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Si $g'(x) > 0 (< 0)$ para todo $x > M$ y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c,$$

entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Demostración

Supóngase que $g'(x) > 0$ para todo $x > M$. Sean $F(u) = f(1/u)$ y $G(u) = g(1/u)$; F y G están definidas en $(0, 1/M)$; así, para $u = 1/x$, con $u \in (0, 1/M)$, se tiene que $x > M$ y

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(u)}{G(u)};$$

además, $u \to 0^+$ cuando $x \to \infty$. Por la regla de la cadena, se observa que

$$F'(u) = -\frac{1}{u^2} f'\left(\frac{1}{u}\right) \quad \text{y} \quad G'(u) = -\frac{1}{u^2} g'\left(\frac{1}{u}\right)$$

y, también, $G'(u) < 0$ si $0 < u < 1/M$.

Cuando $x = 1/u$ y $x > M$, se tiene que

$$\frac{F'(u)}{G'(u)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por tanto, si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c,$$

entonces,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{F'(u)}{G'(u)} = c$$

y, por el teorema 6.8,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{G(u)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Cuando g' es negativa en (a, b) la prueba del teorema se hace de la misma forma.

Un resultado análogo al anterior existe cuando $x \to -\infty$. Como ejercicio, enúnciese y pruébese ese resultado.

LA REGLA DE L'HÔPITAL Y LA FORMA INDETERMINADA ∞/∞

Existen varias extensiones de la regla de L'Hôpital auxiliares en la investigación del comportamiento de un cociente $f(x)/g(x)$ que adopte en el límite la forma ∞/∞. Como una extensión del teorema 6.8, se enuncia el siguiente:

TEOREMA 6.10 **Supóngase que $f'(x)$ y $g'(x)$ están definidas para todo** $x \in (a, b)$ y que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$$

Supóngase que $g'(x) > 0(<0)$ para todo $x \in (a, b)$. Si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c,$$

entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

OTRA GENERALIZACION DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO. TEOREMA DE TAYLOR

De las funciones estudiadas, las más sencillas son las polinomiales, que simplemente llamaremos polinomios. Resulta sencillo calcular sus valores, en especial si se cuenta con calculadoras de gran capacidad y alta velocidad de cómputo; sus derivadas se calculan también con facilidad y, como se verá más adelante, sus integrales se obtienen en forma inmediata.

Es natural que esas funciones se consideren adecuadas para aproximar otras de naturaleza más complicada. Aquí se trataron ya ciertas aproximaciones polinomiales. Se ha visto que si una función f definida en un intervalo I es continua en $a \in I$, entonces $f(x) \cong f(a)$. Es decir, el polinomio $P_0(x) = c_0$, con $c_0 = f(a)$, es una aproximación de f. Al estudiar la diferencial de una función se vio también que, si f es derivable en a, entonces $f(x) \cong P_1(x)$, donde $P_1(x) = c_0 + c_1(x - a)$, con $c_0 = f(a)$ y $c_1 = f'(a)$.

Las diferencias $R_0(x) = f(x) - P_0(x)$ y $R_1(x) = f(x) - P_1(x)$ se llamarán *residuos* (para las aproximaciones P_0 y P_1 de f, respectivamente). Nótese que

$$\lim_{x \to a} R_0(x) = \lim_{x \to a} R_1(x) = 0$$

Cuando, para una aproximación, se tiene la posibilidad de estimar el error cometido, es decir, evaluar su grado de exactitud, se incrementa la utilidad de la aproximación. Por esto interesa tener criterios que permitan estimar los errores de aproximaciones polinomiales.

Por el teorema del valor medio se sabe que si f es derivable en I, entonces para cada $x \in I$ existe un punto c_x entre a y x tal que

$$f(x) - P_0(x) = f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a),$$

o sea, $R_0(x) = f'(c_x)(x - a)$. Por tanto, si la función f' tiene una cota superior M en una vecindad $V(a)$ (V puede ser más pequeña que I), lo cual sucede, por ejemplo, si f' es continua en I; entonces $|R_0(x)| \leqslant M|x - a|$ para todo $x \in V$.

Así, bajo las hipótesis adicionales impuestas a f y f' fue posible encontrar una expresión para $R_0(x)$ y una estimación del error $|R_0(x)|$ de la aproximación de f dada por P_0, en una vecindad de a.

Para $R_1(x)$ y otros residuos de aproximaciones polinomiales, se podrá hacer lo anterior mediante el uso de los resultados de esta sección. Aquí se da una generalización del teorema del valor medio, aplicable a una amplia gama de funciones (que incluye las trigonométricas, la exponencial y la logarítmica) que permite expresar a los residuos de ciertas aproximaciones polinomiales (de Taylor) de manera análoga a la señalada para R_0.

Polinomios de Taylor

Para la función f del apartado anterior y sus aproximaciones P_0 y P_1, se tiene

$P_0(a) = f(a)$ y el grado de P_0 es menor o igual que 0 [menor cuando $f(a) = 0$].

$P_1(a) = f(a)$, $P_1'(a) = f'(a)$ y el grado de P_1 es menor o igual que 1 [menor cuando $f'(a) = 0$].

Supóngase ahora que, para algún entero $n \geqslant 0$, la función f tiene derivada de orden n en a (para esto es necesario que en a existan las derivadas de orden k de f para todo $0 \leqslant k \leqslant n - 1$). ¿Es posible encontrar entonces un polinomio P_n de *grado menor o igual que* n tal que las igualdades

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad [6.3]$$

sean verdaderas?

Analícense los casos particulares siguientes:

Sean $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a = 0$. Se comprueba con facilidad que los polinomios

$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = x,\ P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} \text{ y } P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

satisfacen las condiciones señaladas en la pregunta, para $n = 1, 2, 3, 4$ ó 5, respectivamente.

Recuérdese que $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}'(0) = 1$, $\operatorname{sen}''(0) = 0$, $\operatorname{sen}'''(0) = -1$, $\operatorname{sen}^{(iv)}(0) = 0$ y $\operatorname{sen}^{(v)}(0) = 1$. ¿Encuentra alguna relación entre estos valores y los coeficientes de los polinomios indicados arriba?

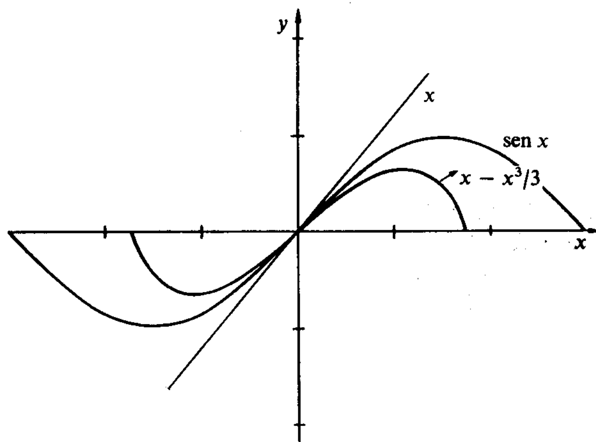


Fig. 6.16 La gráfica de P_0 es el eje x.

*Sean $f(x) = e^x$ y $a = 0$. Para cada $n \geqslant 0$ se tiene que el polinomio P_n, definido a continuación, responde en forma afirmativa la primera pregunta

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = 1 + x,\ P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},\ \ldots,\ P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

¿Encuentra alguna relación entre los coeficientes de estos polinomios y las derivadas e^x en 0?

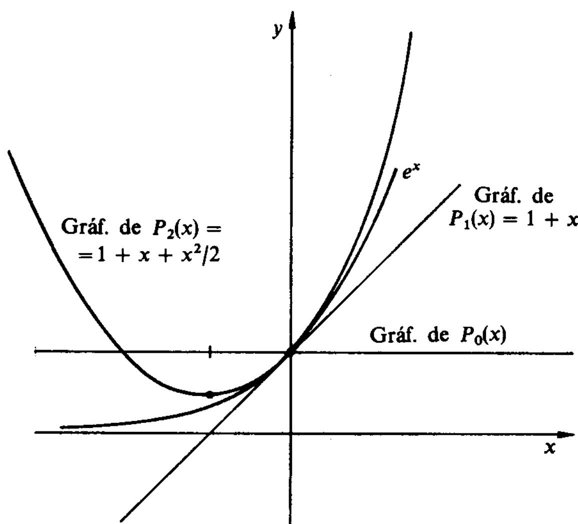


Figura 6.17

Todos los polinomios incluidos en esta sección son ejemplos de los que se llamarán polinomios de Taylor para la función f.

DEFINICION 6.5 *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a. Supóngase que para algún entero $n \geqslant 0$ existe la derivada de orden n de f en a. Entonces, el polinomio*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

se denomina el polinomio de Taylor de orden n para f, alrededor de a.

El teorema siguiente responde a la pregunta planteada al inicio de este apartado.

* En el capítulo siguiente se verá que $(e^x)^{(n)} = e^x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, y que $e^0 = 1$.

TEOREMA 6.10 Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a. Si $f^{(n)}(a)$ existe para algún entero $n \geqslant 0$, entonces el polinomio de Taylor de orden n para f, alrededor de a, es el *único* de grado menor o igual que n que satisface las igualdades [6.3].

Demostración
Sea P_n el polinomio de Taylor de orden n para f, alrededor de a. Es claro que su grado es menor o igual que n, y con facilidad se comprueba que satisface [6.3]. Así, sólo falta probar que es el único polinomio con estas dos propiedades.

Sea $P(x)$ un polinomio de grado menor o igual que n. Si en $P(x)$ se sustituye x por $(x - a) + a$ y se agrupan los términos en $(x - a)$ del mismo grado, entonces se tiene que $P(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n$, para algunos números reales $c_0, c_1, ..., c_n$. Nótese que

$$P(a) = c_0,\ P'(a) = c_1,\ P''(a) = 2!c_2,$$
$$P'''(a) = 3!c_3,\ ...,\ P^{(n)}(a) = n!c_n$$

Por tanto, si P satisface [6.3], entonces

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ c_3 = \frac{f'''(a)}{3!},\ ...,\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Es decir, P es el polinomio P_n.

FORMULA Y TEOREMA DE TAYLOR

Sea f una función definida en un intervalo abierto I y supóngase que $a \in I$. Si P_n es el polinomio de Taylor de orden n para f alrededor de a, entonces para cada $x \in I$ la diferencia $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ y su valor absoluto $|R_n(x)|$ se llamarán *residuo* en x y *error* en x para la aproximación de f dada por P_n. Así mismo, las funciones R_n y $|R_n|$ definidas ya por lo anterior, se llamarán residuo y error para dicha aproximación.

La fórmula

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad [6.4]$$

se denomina *fórmula de Taylor*.

TEOREMA 6.11 *(Teorema de Taylor)* Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene al punto a. Supóngase que $f^{(n+1)}(x)$ existe

para algún entero $n > 0$ y todo $x \in I$. Entonces, para cada $x \in I$, existe c_x entre a y x, tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

donde $R_n(x)$ es el residuo en x para la aproximación de f dada por el polinomio de Taylor de orden n para f, alrededor de a. Así,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Demostración

Esta se basa en el teorema de Rolle, por lo que se recomienda revisarlo.

Si $x = a$, cualquier punto de I sirve para obtener la conclusión del teorema. Supóngase que $x > a$ (cuando $a > x$, se procede en forma análoga). Se define $A = R_n(x)/(x-a)^{n+1}$ y $g(t) = f(t) - (f(a) + f'(a)(t-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + $

$$+ A(t-a)^{n+1}).$$

Es claro que $g^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leqslant k \leqslant n$ y, por la definición de A, también se tiene que $g(x) = 0$.

La función g es derivable en $[a, x]$. Al aplicar el teorema de Rolle, resulta que existe x_1 tal que $a < x_1 < x$ y $g'(x_1) = 0$. Si $n = 0$, entonces x_1 es el punto c_x buscado. Si $n > 0$, entonces de nuevo se aplica el teorema de Rolle a la función g' en $[a, x_1]$, obteniéndose un punto x_2 tal que $a < x_2 < < x_1 < x$ y $g''(x_2) = 0$. Si $n = 1$, entonces x_2 es el punto c_x buscado. En caso contrario, el proceso continúa. Es decir, después de aplicar el proceso anterior n veces, se obtienen n puntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que $a < x_n < \cdots < x_1 < x$ y $g^{(n)}(x_n) = g^{(n-1)}(x_{n-1}) = \cdots = g'(x_1) = 0$.

Puesto que $g^{(n)}(a) = 0$, se concluye, por el teorema de Rolle, que existe un punto c_x tal que $a < c_x < x_n$ y $g^{(n+1)}(c_x) = 0$. Es decir, $0 = f^{(n+1)}(c_x) - (n+1)!(A)$; por tanto, $A = f^{(n+1)}(c_x)/(n+1)!$, y así queda demostrado el teorema.

Nota En general, el teorema anterior se enuncia suponiendo que I es un intervalo cerrado, del que a puede ser un extremo. Si se da este caso, entonces las derivadas en a se interpretan como derivadas laterales.

La expresión para R_n en el teorema anterior se llama forma de Lagrange para el residuo. En otro capítulo se dará la conocida como forma de Cauchy.

COROLARIO 6.3 Bajo las hipótesis del teorema anterior y suponiendo que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, entonces se tiene

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si} \quad x \in I$$

Demostración

Sea $x \in I$. Por el teorema anterior, existe c_x entre a y x (por tanto, $c_x \in I$) tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Así,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si} \quad x \in I$$

EJEMPLO

Encuéntrese el enésimo polinomio de Taylor para la función e^x, alrededor del punto $a = 0$, y una cota para el error $|R_n(x)|$ si $|x| \leqslant M$.

Solución Dado que $(e^x)^{(n)} = e^x$ para todo n y todo x, se tiene que el n-ésimo polinomio de Taylor correspondiente a e^x, alrededor de 0, es

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Así,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

donde

$$R_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},$$

siendo $0 < c < x$.

Además, para todo x tal que $|x| \leqslant M$, se tiene que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^M}{(n+1)!} \cdot M^{n+1}$$

ya que, como también se verá en el capítulo siguiente, e^x es creciente.

DESARROLLOS ESPECIALES DE LA FORMULA DE TAYLOR

En algunos casos, para ciertas funciones puede obtenerse en forma directa una expresión coincidente con la fórmula de Taylor. Por ejemplo: si x es un real distinto de 1, se tiene para n natural que

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

[Multiplíquese $(1 + x)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$ y se obtendrá $1 - x^n$]; por tanto,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x} \qquad [6.5]$$

El polinomio $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ es el polinomio de Taylor de grado menor o igual que $n - 1$, de $1/1 - x$ alrededor de 0. Compruébese.

Así, para $n - 1$, el residuo en la fórmula de Taylor para $1/(1 - x)$ alrededor de 0 es

$$R_{n-1}(x) = \frac{x^n}{1-x},$$

y se tiene

$$|R_{n-1}(x)| = \frac{|x|^n}{|1-x|}$$

Por consiguiente, para n suficientemente grande y $|x| < 1$, se tiene que $|x|^n$ es muy parecido a cero; así pues,

$$\frac{1}{1-x} \cong 1 + x + \cdots + x^{n-1}$$

Ahora, si se utiliza el desarrollo de $1/(1 - x)$, se tiene

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

Así mismo, a partir de [6.5], se tiene que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^2)^{n-1} + \frac{(x^2)^n}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2(n-1)} + \frac{x^{2n}}{1-x^2}$$

donde

$$\frac{x^{2n}}{1-x^2} < \frac{1}{1-x^2} \quad \text{si} \quad |x| < 1$$

Por último, para la expresión $1/(a + tb)$, $a \neq 0$ se tiene

$$\frac{1}{a+tb} = \frac{1}{a\left(1 + t\frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{a\left[1 - \left(-\frac{b}{a}t\right)\right]},$$

con lo cual

$$\frac{1}{a+tb} = \frac{1}{a}\left(1 + \left(-\frac{b}{a}t\right) + \left(-\frac{b}{a}t\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{b}{a}t\right)^{n-1} + \frac{\left(-\frac{b}{a}t\right)^n}{1 + \frac{b}{a}t}\right)$$

Al efectuar operaciones, resulta

$$\frac{1}{a+tb} = \frac{1}{a} - \frac{bt}{a^2} + \frac{b^2t^2}{a^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{b^{n-1}t^{n-1}}{a^n} + \frac{(-1)^n b^n t^n}{a^n(a+bt)}$$

Por tanto, si

$$\left|\frac{b}{a}t\right| < 1$$

o, lo que es igual, si

$$|t| < \left|\frac{a}{b}\right|, \quad \text{con } b \neq 0,$$

entonces, para n grande

$$\frac{1}{a+tb} \cong \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}t + \frac{b^2t^2}{a^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{b^{n-1}t^{n-1}}{a^n}$$

EJERCICIOS

6.1 Encuéntrense los puntos críticos de las funciones $f(x)$ si

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $f(x) = -x^4 + 2x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

d) $f(x) = 8x^4$

e) $f(x) = 8x^2$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x - x$

g) $f(x) = x + \tan(x)$

h) $f(x) = \cot x + x$

i) $f(x) = (x-2)^3(2x+1)$

j) $f(x) = 3x^3$

k) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3x + 1}$

l) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

m) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$

n) $f(x) = (\operatorname{sen} x)\cos^2 x$

o) $f(x) = 2x + \operatorname{ang} \tan x$

p) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$

q) $f(x) = |x - x^2|$

r) $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

s) $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + |x|}$

t) $f(x) = 2 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x$

u) $f(x) = \operatorname{ang} \cos x$

v) $f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$

w) $f(x) = |x^3 + 3x^2 + 6x|$

x) $f(x) = x - [x]$ donde $[x]$ es la función mayor entero menor o igual que x

y) $f(x) = x^{10} + x^{100}$

z) $f(x) = x^3$

6.2 En cada uno de los incisos del ejercicio anterior, determínese si la función tiene valores extremos y, en su caso, dígase en qué puntos los alcanza y cuáles son los valores extremos.

6.3 $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ alcanza valores iguales en los extremos del intervalo $[0, 6]$. ¿Vale el teorema de Rolle para esta función en ese intervalo?

6.4 Sea $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$, donde m, n son enteros positivos. Demuéstrese que el punto c, cuya existencia asegura el teorema de Rolle, divide al intervalo $[a, b]$ en la razón m/n.

6.5 Sea $f(x) = cx^2 + dx + e$ definida en $[a, b]$. Pruébese que el punto k, cuya existencia asegura el teorema del valor medio, es el punto medio del intervalo $[a, b]$.

6.6 Generalícese el teorema de Rolle, y demuéstrese que si f es una función derivable y $f(x)$ es igual a cero en s puntos distintos de un intervalo $[a, b]$, entonces $f'(x)$ es igual a cero, por lo menos en $s-1$ puntos distintos de $[a, b]$.

6.7 Aplíquese el teorema de Rolle para probar que si f es una función derivable en $[a, b]$ y $f'(x) \neq 0$ para $a < x < b$, entonces $f(x)$ es igual a cero, a lo sumo, en un valor x en $[a, b]$.

6.8 La ecuación $\tan x = -x$ tiene por raíz $x = 0$. Pruébese que en el intervalo $[0, \pi/4]$ no tiene ninguna otra raíz.

6.9 En el arco de la parábola $y = x^2$ limitado por los puntos $a = (1, 1)$ y $b = (3, 9)$, hállese un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda que une a con b.

6.10 Pruébese que $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ si $b > a$ y $n > 1$.

6.11 Estúdiese la función que se indica y dígase en dónde alcanza sus valores extremos; determínense los intervalos donde crece y aquellos donde decrece.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ b) $g(x) = (x-2)^2$

c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$ d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

e) $g(x) = x + \operatorname{sen} x$ f) $h(x) = \dfrac{3x-2}{2x+3}$

g) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ h) $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

i) $f(x) = x^4 + 2x^3$ j) $g(x) = x^{2/3} + 3x^{1/3}$

k) $h(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ l) $f(x) = |x^2 - 2x| + 1$

m) $g(x) = x^2 + |2x + 2|$

6.12 Pruébese que el polinomio $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5$ tiene exactamente dos raíces reales.

6.13 Demuéstrese que para todo $x > 0$ se cumple que

a) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ b) $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x$

c) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$

6.14 En los incisos siguientes, determínense los máximos, los mínimos, los puntos de inflexión, etc., y constrúyanse las gráficas correspondientes.

a) $f(x) = x - x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$

d) $f(x) = \text{ang tan}\, x - x$

e) $f(x) = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$

f) $f(x) = x\sqrt{x} + 3$

g) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{(x + 2)^{2/3}}$

i) $f(x) = |x^2 - 6x| + 2$

j) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

k) $f(x) = (x + 2)(x - 2)^3$

l) $f(x) = (x - 3) + \dfrac{2}{x + 1}$

m) $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

n) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

o) $f(x) = x^4 - 2x^2$

p) $f(x) = (x - 1)(x + 1)^2$

q) $f(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^3$

r) $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 - x}$

s) $f(x) = \dfrac{x + 4}{x}$

t) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

u) $f(x) = \sqrt[5]{x - 1}$

v) $f(x) = -2x^2 + x - 3$ en $[-1, 6]$

w) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ en $[-\frac{1}{2}, 1]$

x) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$ en $[-3, 1]$

y) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 18x$ en $[-1, 2]$

6.15 Hállese un número positivo x tal que la suma de dicho número con su recíproco sea mínima.

6.16 Divídase un número a positivo en dos sumandos de forma que su producto sea máximo.

6.17 La diferencia entre dos números es igual a 10. Escójanse los números de manera que su producto sea mínimo.

6.18 Hállese el área máxima de un rectángulo cuyo perímetro es igual a 40 m.

6.19 Con un alambre de longitud l, se desea formar un rectángulo cuya área sea la mayor posible. ¿Cuáles son las dimensiones de los lados del rectángulo?

6.20 Hállense el radio y el ángulo central (en radianes) del sector circular de área máxima y perímetro igual a 25 cm.

6.21 Un avión de la línea Aerosol sufrió un accidente en el desierto a 15 km en línea recta del punto A más cercano de una carretera recta. En seguida un transporte de rescate parte por esta carretera de un punto B situado a 50 km de A. Si se desplaza a 100 km/h en pavimento y a 50 km/h en línea recta en el desierto, ¿a qué distancia de A debe abandonar la carretera para llegar lo más pronto posible al sitio del accidente?

6.22 De una hoja cuadrada de cartón, de lado a, se desea hacer una caja rectangular abierta con el mayor volumen posible; para ello se recortan cuadrados iguales en

las esquinas de la hoja, doblando hacia arriba las hojas resultantes. ¿Cuál es la longitud de los lados de los cuadrados recortados para obtener la caja deseada?

6.23 Se quiere construir un canal, para la lluvia, de manera que su corte transversal sea como el mostrado en la figura.



Calcúlese el ángulo θ para el cual el área de la sección transversal sea máxima.

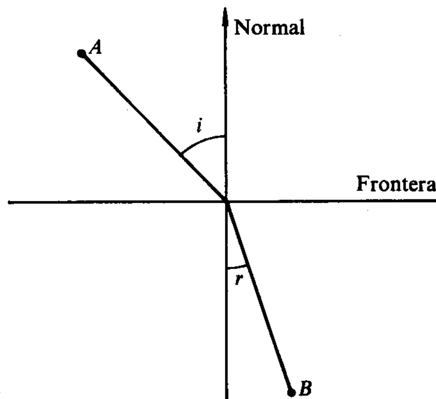
6.24 Un productor de artículos perecederos tiene costos operacionales básicos de a pesos diarios. Cada artículo producido cuesta b pesos, por insumos y mano de obra. Además, si el fabricante produce x artículos cada día, entonces existe un costo diario de cx^2 pesos, debido a que la eficiencia disminuye a medida que los artículos se producen. (El valor c es, por lo regular, muy pequeño; por tanto, cx^2 es de magnitud despreciable a menos que x aumente mucho.) Si se produce sólo un artículo diario, éste puede venderse el mismo día en S pesos (precio de la demanda inicial). Sin embargo, el precio de venta de cada artículo producido en un día dado, baja T pesos por cada artículo producido en ese día. (El número T indica el grado de saturación del mercado por artículo y usualmente es muy pequeño.)

a) Encuéntrese una expresión algebraica que dé la ganancia diaria si el fabricante produce x artículos diarios.

b) Encuéntrese, en términos de a, b, c, S y T, el número x de artículos que el fabricante debe producir al día para que su ganancia diaria sea máxima.

6.25 De todos los conos circulares rectos que pueden ser inscritos en una esfera de radio a, determínese el que tiene volumen máximo.

6.26 En óptica, el *principio de Fermat*, dice: Considérese un punto A situado en un medio en el cual la velocidad de la luz es V_1 y considérese otro punto B situado en un medio en que la velocidad de la luz es V_2 (la frontera de los dos medios es un plano). «La trayectoria de un rayo luminoso que va de A a B será aquella para la cual el tiempo de recorrido es mínimo.»

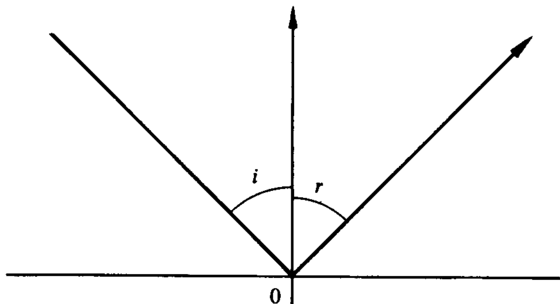


Con base en este principio, demuéstrese que, al pasar la luz de un medio a otro, los *ángulos* de *incidencia* y de *refracción* se relacionan de la manera siguiente:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Esta relación se conoce como *ley de Snell* (véase figura anterior).

6.27 A partir del principio de Fermat, demuéstrese que si la luz se refleja en una superficie plana, entonces el ángulo de incidencia es igual al *ángulo de reflexión* (véase la figura).



6.28 ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un recipiente para que la cantidad de material usado sea mínima, si el recipiente debe ser cilíndrico con un volumen V? (El recipiente está cerrado en ambos extremos.)

6.29 Un fabricante puede vender x artículos a la semana, a un precio unitario de $P = 200 - 0.01x$ pesos; producir tales artículos le cuesta $y = 50x + 200$ pesos. ¿Cuál es la producción que el fabricante debe mantener para obtener los máximos beneficios?

6.30 Si la suma de las áreas de una esfera y un cubo es constante, ¿cuál es la razón de una arista del cubo al diámetro de la esfera cuando

a) la suma de los volúmenes es mínima?

b) la suma de los volúmenes es máxima?

6.31 Una fábrica se localiza a la orilla de un río recto de 400 m de ancho. En la otra orilla, un kilómetro río abajo, se encuentra una planta de electricidad que surte a la fábrica.

Suponiendo que el costo de conducción de la energía es tres veces mayor si se transporta bajo tierra que si se hace en forma aérea, calcúlese cuál debe ser la trayectoria del cableado para que su costo por metro sea mínimo. ¿Qué se puede decir si el costo es tres veces menor?

6.32 En un lago circular de 1000 m de diámetro, un hombre quiere cruzar el lago a un punto diametralmente opuesto. Si suponemos que puede nadar a razón de 12 km/h o correr rodeando el lago a 20 km/h, calcúlese la trayectoria que minimiza su tiempo.

6.33 Un grupo de personas quiere contratar un vuelo especial de México a San Francisco, para asistir al Super Tazón entre los *Raiders* y los *Cuarenta y nueve* de San Francisco. Para esto se requiere un mínimo de 80 personas que deberán pagar 300 dólares cada una. Sin embargo, la compañía ofrece reducir la tarifa en cinco

dólares a cada pasajero adicional. Bajo estas condiciones, ¿cuál es el número de personas que produce a la compañía la máxima utilidad?

6.34 Pruébese que la distancia más corta entre un punto (x_1, y_1) y la gráfica de una función diferenciable f se mide a lo largo de una recta a través de (x_1, y_1) y normal a la gráfica, es decir, una recta perpendicular a la recta tangente.

6.35 Pruébese que el rectángulo de área máxima que puede formarse con un perímetro dado l es un cuadrado.

6.36 Encuéntrese el punto de la parábola $y = x^2 + 1$ más próximo al punto $(3, 1)$.

6.37 Encuéntrense las medidas del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio r.

6.38 Encuéntrense las dimensiones del rectángulo que tiene área máxima donde dos de los vértices se encuentran en el eje x, y los otros dos, en la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$.

6.39 El costo total C por fabricar x juguetes se calcula con la fórmula $C = 800 + 20x + 8000/x$. Determínese el nivel de producción x para que el costo total sea mínimo.

6.40 En medicina se observa que una *reacción* R a una dosis de magnitud x de una droga está dada por una ecuación de la forma

$$R = Ax^2(B - x),$$

donde A y B son constantes positivas. La *sensibilidad* del cuerpo a una dosis de magnitud x se define como la derivada dR/dx de la reacción respecto a la dosis.

a) ¿Para qué valor de x es máxima la reacción?

b) ¿Para qué valor de x la *sensibilidad* dR/dx es máxima?

6.41 Evalúense los límites siguientes, usando la regla de L'Hôpital.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x + 2x - 1}{3x}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x - 1} - 2}{x^2 - 25}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\operatorname{sen} x}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)^2}{(x^2 - 1)^{4/3}}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 2x - 1}{2x^3 - 3x^2 + 3}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x^3 - 8}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos 2x}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ang} \tan x^2}{x \operatorname{sen} x}$

l) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\tan x}{\cot 2x}$

m) $\lim\limits_{x \to \pi/a} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \sec x$

n) $\lim\limits_{\theta \to 0} \left(\csc \theta - \dfrac{1}{\theta}\right)$

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^2}{x + 1}$

p) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{2x^4 - x^2 + 2}$

q) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{ang} \tan x\right)$

r) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right]$

6.42 Demuéstrese que si existe la segunda derivada f'' de f en a, entonces el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

6.43 Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de grados m y n, respectivamente, encuéntrese el $\lim_{x \to \infty} P(x)/Q(x)$ en los casos siguientes:

a) $m > n$ b) $m = n$ c) $m < n$

6.44 Usese el teorema de Taylor para probar que si $P(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n, entonces

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

6.45 Hállese una cota superior para el valor absoluto del residuo $R(x) = f(x) - P(x)$, en los casos siguientes:

a) $f(x) = x^4$, $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden cuatro, alrededor de $a = 0$ y $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

b) $f(x) = \text{ang}\tan x$, $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden tres, alrededor de $a = 0$ y $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

6.46 En los incisos siguientes, aproxímese con un error menor que 10^{-3},

a) $\cos 0.5$ b) $1.08^{1.4}$ c) $0.91^{1/3}$

d) $30^{1/5}$ e) $15^{1/4}$ f) $65^{1/6}$

g) $\tan 0.1$ h) $\operatorname{sen} 0.5$ i) $\operatorname{sen} 1°$

6.47 Dada la función $\cos^2 x$, acótese $R_4(x)$ en el intervalo $(-\pi/6, \pi/6)$ alrededor de $x = 0$.

6.48 Aproxímense los valores siguientes con un error menor que 6×10^{-5}.

a) $\operatorname{sen} 89°$ b) $\cos 47°$ c) $\sqrt[3]{27.4}$

Isaac Barrow
(1630 a 1677)

Teólogo y matemático, desarrolló un método para determinar tangentes con un enfoque que se aproximaba a los métodos del cálculo. Fue el primero en descubrir que los procesos de derivación e integración podían considerarse como operaciones inversas entre sí.

Después de ordenarse de ministro anglicano, en 1660, se inició como profesor de griego en la Universidad de Cambridge; posteriormente, fue profesor de geometría en el Gresham College de Londres. También, en 1660, realizó una magnífica traducción de Los elementos *de Euclides.*

En Cambridge se dedicó a preparar tres series de conferencias sobre óptica (1669), geometría (1670) y matemáticas (1683).

En sus Lectiones Geometricae *aparecen elementos semejantes a los del cálculo, que fueron del conocimiento de Leibniz y Newton. Este último fue su alumno, y se afirma que la influencia de Barrow fue decisiva en la formulación que Newton hiciera del cálculo; en 1669 trabajaron juntos durante un breve periodo. En ese mismo año, Barrow renunció a su cargo en el Trinity College, en favor de Newton, y se dedicó al estudio de la Divinidad. Por último, en 1675 fue nombrado vicecanciller de la Universidad de Cambridge.*

En forma paralela a la vida de Barrow, se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Boileau: *Sátiras,* 1660; *Arte poético,* 1674.
Cyrano de Bergerac: *Historia cómica de los estados de la luna,* 1657.
Racine: *Andrómaca,* 1667; *Fedra,* 1677.

MUSICA

Carissimi: *Jephte,* 1649.
Lully: *Alceste,* 1674.

PINTURA

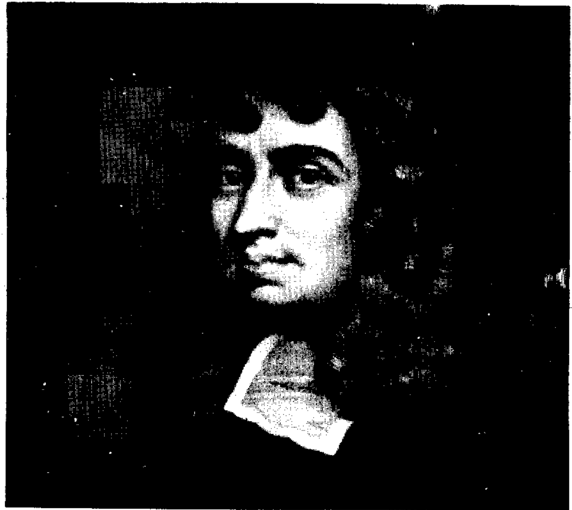
Jan van Goyen: *Vista de Leiden*, 1643.
Rembrandt: *Los síndicos*, 1662.
Vermeer: *La lección de música, La cochera*, 1660; *El astrónomo*, 1668.

ARQUITECTURA

Se construye la columnata del Louvre, 1667.
Cano: Fachada de la catedral de Granada, 1667.
Se construye el Convento de San Francisco, en Lima, Perú, 1673.

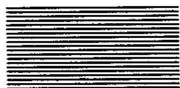
CULTURA EN GENERAL

Mercenne: *Armonía universal*, 1636.
Pascal: *Ensayo sobre las cónicas*, 1640.



Isaac Barrow

7



FUNCIONES LOG Y EXP

INTRODUCCION

En la tabla de primitivas construida en el capítulo 5, puede observarse que para la función $1/x$ no se exhibe una función primitiva, es decir, una función $F(x)$ tal que $F'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$. En este capítulo se construirá una función que tenga la propiedad anterior para los x positivos y, a partir de ella, se obtendrá una primitiva de $1/x$ para todo $x \neq 0$.

El método para tal construcción será el seguido usualmente para obtener funciones primitivas de funciones dadas; este método lleva a una solución única del problema cuando la función dada tenga por dominio un intervalo I y se establezca una condición adicional, a saber, que el valor de la función buscada en cierto punto $x_0 \in I$ sea un valor predeterminado c. La función que se construirá y se designará por log, será una primitiva de la función $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1/x$ y tal que $\log(1) = 0$. Esta función se llamará *logaritmo natural.*

Es conveniente también señalar que esta función log posee las propiedades siguientes:

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$
$$\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$$

para $x, y \in (0, \infty)$.

Construcción de la función logaritmo natural

Considérese la gráfica de la función $1/t$ restringida al intervalo $(0, \infty)$. Para cada $x \geqslant 1$, definimos $\log(x)$ como el área de la región del plano comprendida por la gráfica de $1/t$, el eje x y las rectas $t = 1$ y $t = x$. Es claro que $\log(1) = 0$. Para $0 < x < 1$ se define $\log(x)$ como *menos* el área de la región determinada por la gráfica, el eje x y las rectas $t = x$ y $t = 1$.

TEOREMA 7.1 Para todo $x > 0$ se tiene que $\log'(x) = 1/x$.

Demostración

Por comodidad, se supone que $x > 1$, y se demuestra que la derivada de log por la derecha en x es $1/x$, explícitamente

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

Sea $h > 0$, entonces la diferencia

$$\log(x+h) - \log(x)$$

es el área de la región comprendida por la gráfica de $1/t$, el eje x y las rectas $x = t$ y $t = x + h$ (véase Fig. 7.1).

Ahora bien, la función $1/t$ es decreciente; por tanto,

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{x+h}, \qquad \text{para } x \leqslant t \leqslant x+h$$

Así, en términos de áreas se tiene (Fig. 7.2)

$$h\frac{1}{x+h} \leqslant \log(x+h) - \log(x) \leqslant h\frac{1}{x}$$

De este modo, al dividir entre h, se obtiene

$$\frac{1}{x+h} \leqslant \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \leqslant \frac{1}{x};$$

por consiguiente, si se toma el límite cuando $h \to 0^+$, se tiene que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{x+h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \leqslant \frac{1}{x},$$

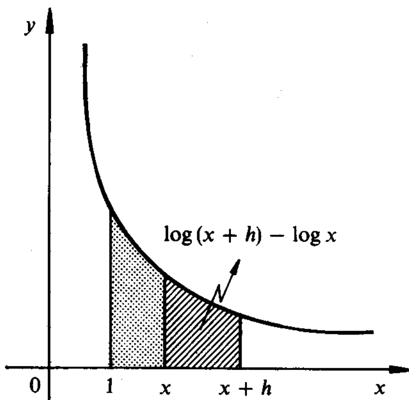


Figura 7.1

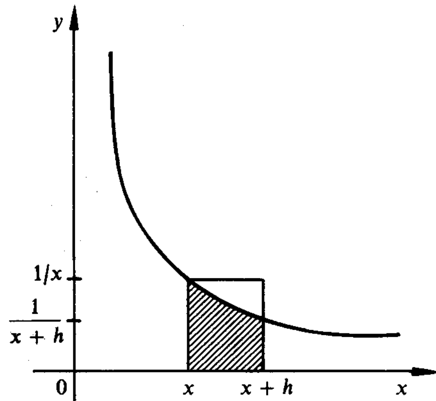


Figura 7.2

pero la función $1/t$ es continua en x, por lo que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

En forma análoga se prueba que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

Así, $(\log x)' = 1/x$.

COROLARIO 7.1 La función log es continua.

A continuación deducimos las propiedades antes señaladas de la función log:

1) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, para $x, y \in (0, \infty)$ [7.1]

Sea $y > 0$ un real fijo, entonces la función $\log(xy)$ tiene por derivada respecto a x

$$(\log xy)' = \frac{(xy)'}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

Por tanto, las funciones $\log x$ y $\log xy$ tienen las mismas derivadas en todos los puntos; en consecuencia, por el corolario 6.3, ellas difieren en un número c, es decir,

$$\log xy = \log x + c, \quad \text{para todo } x > 0 \qquad [7.2]$$

para calcular el valor de c se hace $x = 1$, es decir,

$$\log y = \log 1 + c$$

Por tanto, se tiene de [7.2]

$$\log(xy) = \log x + c = \log x + \log y$$

Es posible también dar una generalización de [7.1] tomando un número real $x > 0$ y otro natural n,

$$\log(x^n) = \log \underbrace{(x\cdots x)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{\log x + \cdots + \log x}_{n \text{ sumandos}} = n \log x$$

2) $\log(x/y) = \log x - \log y$, para $x, y \in (0, \infty)$
Se probará que

$$\log(1/x) = -\log x \quad \text{si} \quad x > 0$$

Aplíquese la función log a ambos lados de la igualdad

$$x \cdot 1/x = 1;$$

resulta que $\log x + \log (1/x) = \log 1 = 0$. Así,

$$\log (1/x) = -\log x$$

Al combinar este resultado con 1) se obtiene 2).

Cálculo aproximado de algunos logaritmos

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y positiva. Como se verá en el capítulo 9 sobre integración, una manera de aproximar el área A de la región comprendida entre la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, es:

Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud. Para cada uno de estos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ se construye el trapecio que tiene por vértices los puntos $(x_{i-1}, 0)$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, 0)$ y $(x_i, f(x_i))$.

Si A_i es el área de cada uno de dichos trapecios, entonces

$$A \cong A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad \text{(Fig. 7.3).}$$

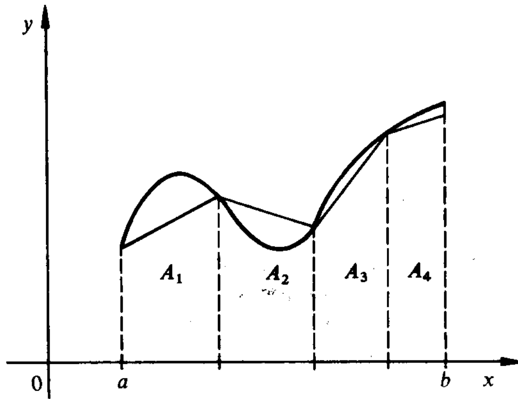


Fig. 7.3 La aproximación es mejor a medida que n es más grande.

Así, es posible calcular en forma aproximada el log 2 de la manera siguiente: log 2 es aproximadamente igual a la suma de las áreas de 10 trapecios determinados, según lo anterior, por los subintervalos siguientes:

$$\left[1, \frac{11}{10}\right], \left[\frac{11}{10}, \frac{12}{10}\right], \ldots, \left[\frac{19}{10}, 2\right] \quad \text{(Véase Fig. 7.4.)}$$

Cada trapecio tiene por área

$$A_1 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{i-1}{10}} + \frac{1}{1 + \dfrac{i}{10}} \right), \quad \text{donde } i = 1, 2, ..., 10$$

Por tanto, log 2 es aproximadamente igual a la suma

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{20}\right)\right],$$

que es igual a 0.694 unidades de área.

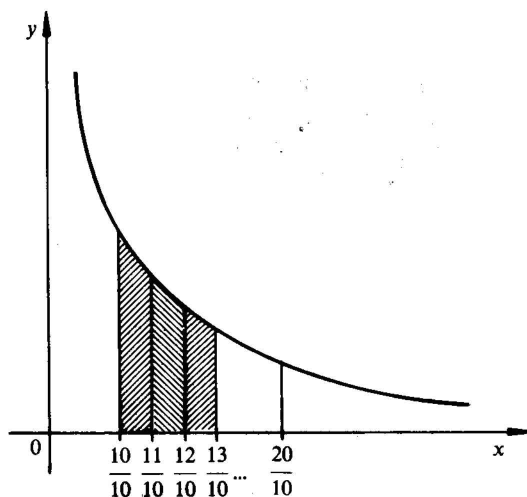


Figura 7.4

Mediante este resultado y las propiedades de log, puede construirse una tabla de aproximaciones para algunos valores de log.

TABLA 7.1

x	$\log x$
2	0.694
4	1.388
8	2.082
$\frac{1}{2}$	−0.694
$\frac{1}{4}$	−1.388
$\frac{1}{8}$	−2.082
32	3.47

Por otra parte, el área del rectángulo que tiene por lados el intervalo $[1, 2]$ y el segmento que une $(2, 0)$ con $(2, \frac{1}{2})$, es menor que $\log 2$. Es decir, $\frac{1}{2} \leqslant \log 2$. Por tanto, $\log 4 = \log 2^2 \geqslant 1$.

La función log no es acotada, ya que dado $M > 0$ existe un natural $n > M$, y así,

$$\log 4^n = n \log 4 \geqslant n > M$$

También, si $M_1 < 0$, existe un natural $m > -M_1$. Por consiguiente,

$$\log 4^{-m} = -m \log 4 < -m < M_1$$

La función log toma, además, todos los valores reales, es decir, si y es un número real, entonces existe $x > 0$ tal que

$$\log x = y,$$

como se muestra en el teorema siguiente:

TEOREMA 7.2 La función $\log: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y suprayectiva, es decir,

1) $0 < x < y$ implica que $\log x < \log y$;
2) dado $y \in \mathbb{R}$ existe, $x > 0$ tal que $\log x = y$.

De este modo, la función log es biyectiva.

Demostración

$(\log x)' = 1/x$ para todo $x > 0$; en consecuencia, log es una función estrictamente creciente y, por tanto, se cumple 1). Por el teorema del valor intermedio, se tiene que $\log x$ toma todos los valores $y \in [-n \log 4, n \log 4]$ cuando varía x en el intervalo $[1/4^n, 4^n]$, como $-n \log 4$ sobrepasa cualquier número negativo tomando n suficientemente grande y, en forma análoga, $n \log 4$ sobrepasa cualquier número positivo, se obtiene la conclusión pedida en 2).

La última afirmación contenida en el teorema se sigue de las dos primeras.

LA FUNCION EXPONENCIAL

En virtud del teorema 7.2, se tiene que la función $\log x$ posee función inversa, que está definida para todos los números reales. Esta función se llama exponencial y se denota por

$$\exp(x)$$

Además, $\exp(x) > 0$ para todo x y es una función creciente, ya que su derivada es positiva por coincidir con $\exp(x)$ en todo x, como se probará en el teorema 7.4.

DEFINICION 7.1 *Conforme a la definición general de función inversa se tiene que*

$$exp(x) = y \quad si \quad log\ y = x$$

Obsérvese de la definición que

$$\exp(\log y) = y \qquad [7.3]$$

y

$$\log(\exp x) = x \qquad [7.4]$$

Con la tabla 7.1 es posible obtener con facilidad una pequeña tabla de valores aproximados de exp.

TABLA 7.2

x	$\exp(x)$
0	1
0.694	2
2.082	8
−0.694	$\frac{1}{2}$
−1.388	$\frac{1}{4}$
−2.082	$\frac{1}{8}$
3.470	32

Nótese que en la tabla 7.2 los valores de x son los correspondientes a $\log x$ en la tabla 7.1, y viceversa.

La gráfica de la función exp se muestra en la figura siguiente.

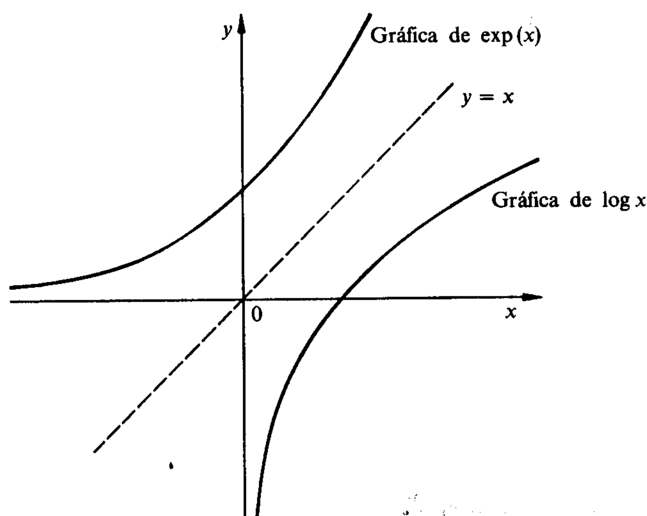


Figura 7.5

Partiendo de que $\exp(x)$ es la función inversa de $\log x$, se tiene el teorema siguiente:

TEOREMA 7.3 Dados x e y números reales,

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$$

Demostración
De las fórmulas [7.4] y [7.1] se obtiene

$$\log(\exp(x + y)) = x + y = \log(\exp(x)) + \log(\exp(y)) =$$
$$= \log(\exp(x)\exp(y))$$

De esta última expresión se obtiene el resultado enunciado, pues log es una función inyectiva.

COROLARIO 7.2 Sean $x, y \in \mathbb{R}$. $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$.

Demostración
Por el teorema anterior, basta demostrar que $\exp(-y) = 1/\exp(y)$.

$$1 = \exp(0) = \exp(y - y) = \exp(y)\exp(-y);$$

por tanto,

$$\exp(-y) = 1/\exp(y)$$

A continuación se define el número e como

$$e = \exp(1)$$

Este número e es irracional y es posible calcular tantas cifras decimales de él como se desee. Si n es un número natural, entonces se tiene que

$$\exp(n) = \exp(1 + 1 + \cdots + 1)$$

Aquí aparecen n sumandos y, por las propiedades de exp, resulta que

$$\exp(n) = e^n;$$

en forma análoga, para el número entero negativo $-n$, se tiene

$$\exp(-n)\exp(n) = \exp(n - n) = \exp(0) = 1$$

Por tanto,

$$\exp(-n) = 1/\exp(n) = 1/e^n = e^{-n}$$

De igual manera puede demostrarse que, dado cualquier racional p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$,

$$\exp(p/q) = e^{p/q}$$

En virtud del planteamiento anterior, se define para cualquier número real x,

$$e^x = \exp(x)$$

En adelante se usará esta última notación para $\exp(x)$. Después se probará que $e \leqslant 3$, resultado que usaremos en lo que sigue.

OTRAS BASES

Si $a > 0$, se define para cualquier número real x,

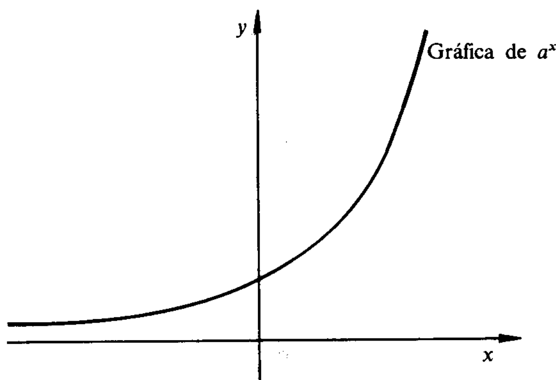
$$a^x = e^{x \log a} \quad [7.5]$$

Así se ha definido una función a^x cuyo dominio son todos los números reales.

Es sencillo demostrar que a^x comparte algunas propiedades con e^x.

A partir de la igualdad [7.5], se tiene que

$$\log(a^x) = \log(e^{x \log a}) = x \log a,$$



y así,

$$x = \log(a^x)/\log a;$$

si se hace $a^x = y$ y se define x como logaritmo con base a de y, entonces resulta que, para el número real positivo a,

$$\log_a y = \log y/\log a$$

Ahora bien, a partir de esta última igualdad es posible obtener valores para la función log usando la igualdad

$$\log y = \log_{10} y/\log_{10} e$$

y una tabla para $\log_{10}$.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Dado que la función e^x es la inversa de $\log x$, se tiene el teorema siguiente:

TEOREMA 7.4 La función e^x es derivable y

$$(e^x)' = e^x$$

Demostración

De acuerdo con la regla para derivar las funciones inversas, se concluye

$$(e^x)' = 1/\log'(e^x) = 1/1/e^x = e^x$$

COROLARIO 7.3 e^x es continua.

TEOREMA 7.5

1) a^x es derivable. Más aún,

$$(a^x)' = (\log a)(a^x)$$

2) a^x es continua.

Demostración

1) Por definición se tiene

$$a^x = e^{x \log a}$$

si se hace

$$u(x) = x \log a,$$

resulta

$$u'(x) = \log a$$

y

$$d/dx(e^{u(x)}) = du(x)/dx \cdot de^u/du = du/dx \cdot e^u$$

Y, sustituyendo $u(x)$, se tiene demostrada la primera parte del teorema.

2) Se sigue de 1).

Una aplicación importante de la función exponencial se tiene en la definición siguiente:

DEFINICION 7.2 *Para un número real a fijo, se define la función x^a con dominio en los números reales positivos y con regla de correspondencia*

$$x^a = e^{a \log x}$$

TEOREMA 7.6 La función x^a es derivable y su derivada es la función ax^{a-1}.

Demostración

$$(x^a)' = (e^{a \log x})' = (a \log x)'(e^{a \log x}) =$$
$$= (a/x)(e^{a \log x}) = ax^a/x = ax^{a-1}$$

Este teorema generaliza, para todo $a \in \mathbb{R}$, la fórmula [5.4].

DERIVACION LOGARITMICA

El proceso mostrado a continuación resulta útil para el cálculo de las derivadas de algunas funciones con aspecto complicado; su nombre se debe a que se toma el logaritmo de la función original para transformarla en una de manejo más sencillo. La nueva función se deriva usando propiedades estudiadas en párrafos anteriores.

EJEMPLO 1 Derivaremos mediante este proceso la función a^x (cuya derivada se vio en la sección anterior), donde $a > 0$ y x está en los números reales.

Sea $y = a^x$. Considérese el logaritmo de cada miembro de la igualdad, con lo que

$$\log y = \log a^x,$$

de donde

$$\log y = x \log a$$

Si derivamos respecto a x, tenemos

$$\boxed{1/y \cdot y' = \log a}$$

La expresión está enmarcada porque se obtuvo aplicando la regla de la cadena a $\log y$.

Así,

$$y' = y \log a = a^x \log a$$

EJEMPLO 2 Calcúlese la derivada de $y = x^x$, $x > 0$.

Solución Tómense logaritmos de cada lado de la igualdad,

$$\log y = \log x^x,$$

por lo que

$$\log y = x \log x$$

Al derivar, se tiene

$$y'/y = \log x + 1;$$

así,

$$dy/dx = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

Por tanto,

$$dy/dx = x^x(\log x + 1)$$

EJEMPLO 3 Derívese la función $(\text{sen}\, x)^x$, $x \in (0, \pi)$.

Solución Sea $y = (\text{sen}\, x)^x$. Tómense logaritmos de cada lado de la igualdad,

$$\log y = \log (\text{sen}\, x)^x = x \log (\text{sen}\, x);$$

derívese respecto a x, con lo que se obtiene

$$y'/y = \log (\text{sen}\, x) + x \cos x/\text{sen}\, x = \log (\text{sen}\, x) + x \cot x$$

Así,

$$dy/dx = (\text{sen}\, x)^x(\log (\text{sen}\, x) + x \cot x)$$

FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS DERIVADAS

Funciones hiperbólicas

Según lo expuesto en la sección sobre funciones trigonométricas, se observa que si el radio OV del círculo unitario (Fig. 7.6) se gira en dirección positiva hasta barrer un área igual a $x/2$, con $x > 0$, entonces el extremo en su posición final es el punto de coordenadas $(\cos x, \text{sen}\, x)$.

(Recuérdese que el área del sector OPV es $\theta/2$, donde θ es la medida en radianes del ángulo OPV, por tanto, $\theta = x$.)

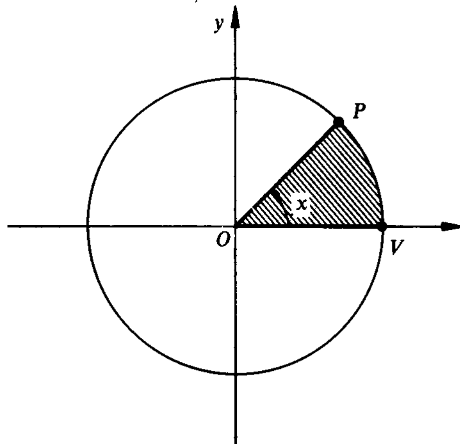


Fig. 7.6 Area del sector $OPV = x/2$.

Más adelante se probará que para cada $t > 0$ existe un único punto $P_0(x, y)$ con x e y positivos, en la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$, tal que la región limitada por el eje x, la recta OP_0 y esa hipérbola, tiene un área igual a $t/2$ (Fig. 7.7). Por esto y lo señalado en el párrafo anterior, puede encontrarse justificado que la abscisa x de P_0 se llame coseno hiperbólico de t ($\cosh t$) y su ordenada y, seno hiperbólico de t ($\operatorname{senh} t$).

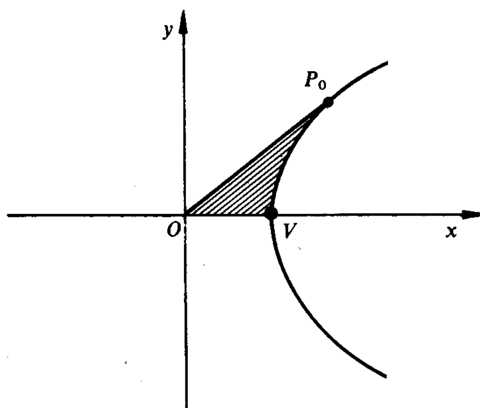


Figura 7.7

No obstante haber impuesto la restricción $t > 0$ para justificar los nombres de las dos funciones principales por estudiar en esta sección, se tiene que las funciones seno hiperbólico (senh) y coseno hiperbólico (cosh) están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, de acuerdo a las expresiones

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Antes, a partir de sen y cos, se definieron las funciones trigonométricas restantes. Ahora, en forma análoga, se definirán las funciones tangente hiperbólica (tanh), cotangente hiperbólica (coth), secante hiperbólica (sech) y cosecante hiperbólica (csch) como sigue:

$$\tanh t = \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t}, \quad \coth t = \frac{\cosh t}{\operatorname{senh} t}, \quad \operatorname{sech} t = \frac{1}{\cosh t} \quad \text{y} \quad \operatorname{csch} t = \frac{1}{\operatorname{senh} t}$$

Como $\cosh t \neq 0$ (de hecho, $\cosh t > 0$) para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\operatorname{senh} t = 0$ sólo para $t = 0$, se concluye que los dominios naturales de tanh y de sech coinciden con $\mathbb{R}$, mientras los de coth y csch son $\mathbb{R} - \{0\}$.

En seguida aparecen algunas relaciones útiles entre las funciones hiperbólicas

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$
$$1 - \tanh^2 t = \operatorname{sech}^2 t$$
$$\coth^2 t - 1 = \operatorname{csch}^2 t$$
$$\operatorname{senh} 2t = 2 \operatorname{senh} t \cosh t$$
$$\cosh 2t = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t$$

Obsérvese que éstas recuerdan algunas de las que se establecieron para las funciones trigonométricas, aunque se presentan ciertos cambios de signo.

Algunas propiedades de las funciones hiperbólicas

Todas las funciones hiperbólicas son continuas. Más aún, es fácil probar que son derivables y que

$$(\operatorname{senh})'(t) = \cosh t \qquad (\coth)'(t) = -\operatorname{csch}^2 t$$
$$(\cosh)'(t) = \operatorname{senh} t \qquad (\operatorname{sech})'(t) = -\operatorname{sech} t \tanh t$$
$$(\tanh)'(t) = \operatorname{sech}^2 t \qquad (\cosh)'(t) = -\operatorname{csch} t \coth t$$

Examínese en particular la función senh. Es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, pues su función derivada es positiva y, por consiguiente, no tiene valores extremos. Por otra parte, $\operatorname{senh} t > 0$ si $t > 0$, $\operatorname{senh} t < 0$ si $t < 0$ y $(\operatorname{senh})''(t) = \operatorname{senh} t$; así, senh es cóncava hacia arriba en $[0, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0]$ y tiene un punto de inflexión en el origen.

Por último,

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{senh} t = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t\to-\infty} \operatorname{senh} t = -\infty$$

Basándose en el análisis anterior (Fig. 7.8), se presenta la gráfica de senh t.

Las gráficas de las otras funciones hiperbólicas aparecen en la figura 7.9.

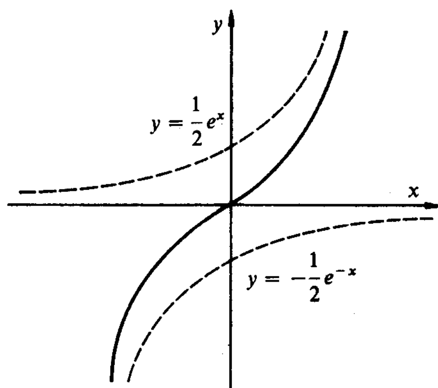


Figura 7.8

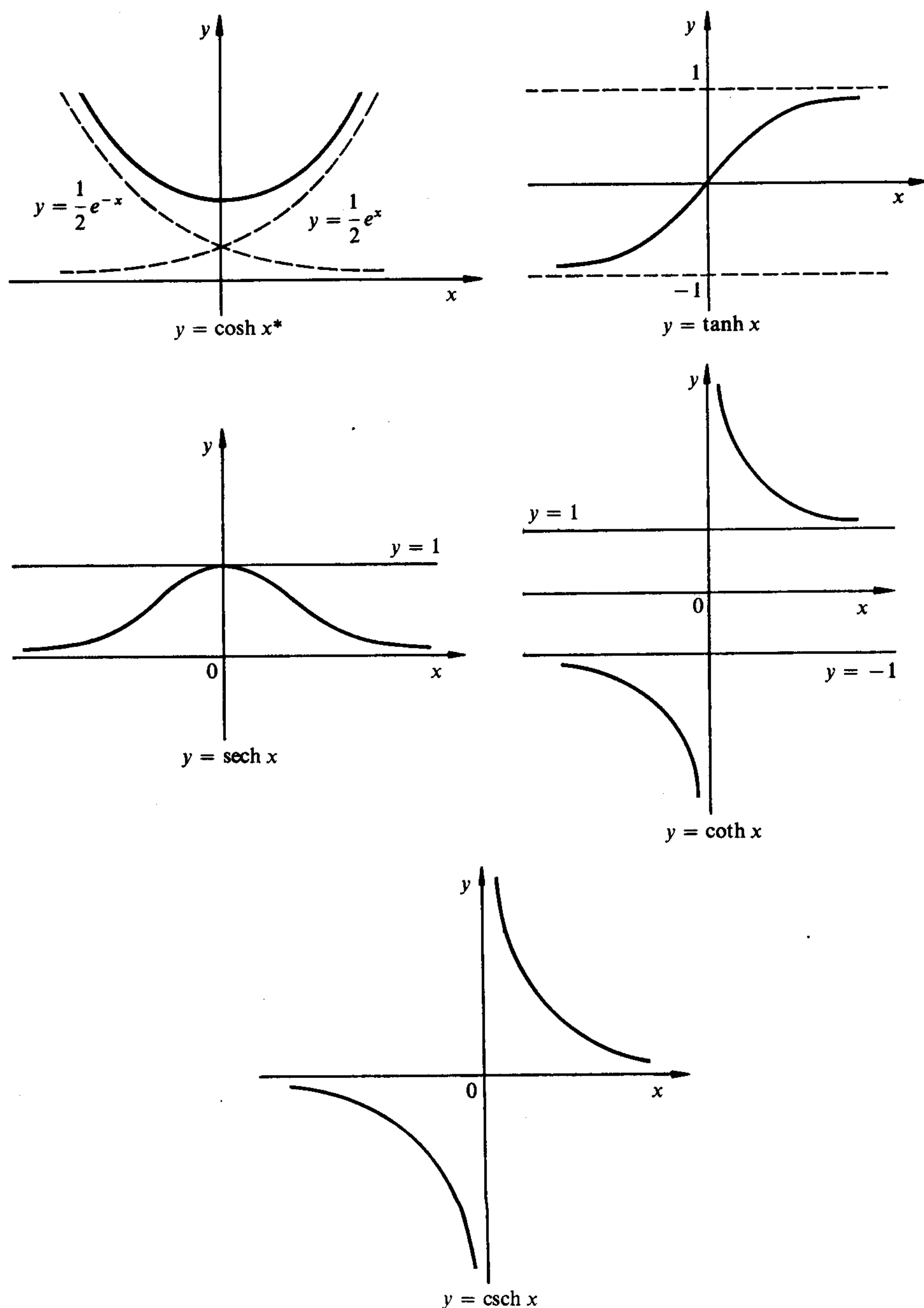


Figura 7.9

* A $a \cosh x/a$ también se le conoce como «catenaria» y es posible observarla al mirar un cable con tensión entre dos postes que lo sostienen.

FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

Las funciones senh y tanh son estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$. Sus imágenes son $\mathbb{R}$ y $(-1, 1)$, respectivamente. Sus funciones inversas se denotan por senh^{-1} y $\tanh^{-1}$.

Las funciones cosh y sech no son inyectivas y, por consiguiente, sus dominios tienen que restringirse, como se hizo en el caso de las funciones trigonométricas, para definir sus funciones inversas. A continuación se muestran los dominios e imágenes de algunas funciones hiperbólicas inversas.

	Dominio	*Imagen*
$\cosh^{-1}$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$
sech^{-1}	$(0, 1]$	$[0, \infty)$
csch^{-1}	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\coth^{-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Para definir, por ejemplo, $\cosh^{-1}$, se tomó la restricción de cosh al conjunto $[0, \infty)$. En este intervalo la función cosh es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva, y la imagen de $[0, \infty)$ bajo cosh es el intervalo $[1, \infty)$. Así, su función inversa, denotada por $\cosh^{-1}$, asocia a cada y en $[1, \infty)$, el único número real x en $[0, \infty)$ tal que $\cosh x = y$.

Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas aparecen en la figura 7.10 y pueden obtenerse por el método indicado en el capítulo 2 (pág. 60).

Dado que las funciones hiperbólicas se definen por medio de la función exponencial, no resulta extraño que sus inversas puedan expresarse en términos de la función logaritmo y, así, se tienen las igualdades siguientes:

$$\operatorname{senh}^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y}$$

$$\operatorname{sech}^{-1} y = \log \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} y = \log\left(\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1 + y^2}}{|y|}\right)$$

$$\coth^{-1} y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{y - 1}$$

donde, en cada caso, y es cualquier punto del dominio de la función correspondiente.

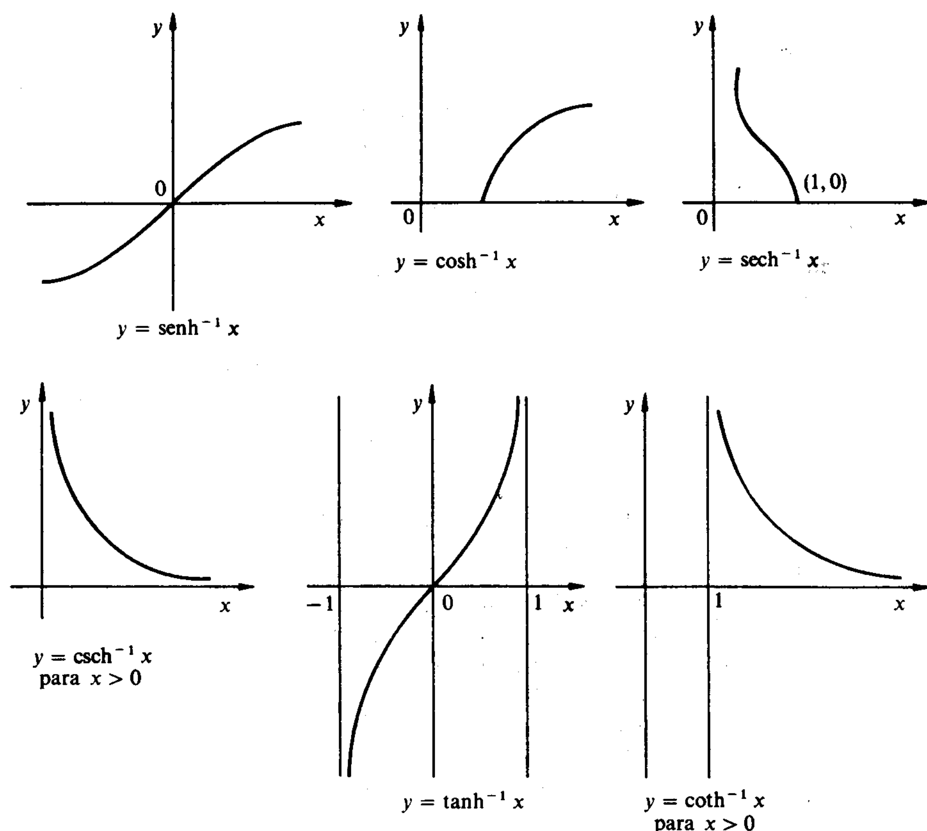


Figura 7.10

Se probará sólo la primera de estas igualdades.

Sea $y \in \mathbb{R}$ y $x = \operatorname{senh}^{-1} y$. Es decir, $\operatorname{senh} x = y$. Así,

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Por tanto,

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Como $\sqrt{y^2 + 1} > y$ para todo $y \in \mathbb{R}$, y $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{senh}^{-1} y = x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

De las igualdades anteriores, es sencillo probar

$$(\operatorname{senh}^{-1})'y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}, \qquad y \in \mathbb{R}$$
$$(\cosh^{-1})'y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \qquad y \in (1, \infty)$$
$$(\tanh^{-1})'y = 1/(1-y^2), \qquad y \in (-1, 1)$$
$$(\operatorname{sech}^{-1})'y = -\frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}, \qquad y \in (0, 1)$$
$$(\operatorname{csch}^{-1})'y = -\frac{1}{|y|\sqrt{1+y^2}}, \qquad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$
$$(\coth^{-1})'y = 1/(1-y^2), \qquad y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Debe notarse que las funciones $\cosh^{-1}$ y sech^{-1} no son derivables en todos los puntos de sus dominios.

LIMITES DE ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

En esta sección se estudian los límites al infinito de funciones como log, e^x, e^x/x, etc., y otros límites de las mismas; su importancia radica en que nos describen el comportamiento de estas funciones cuando la variable crece en forma indefinida.

Este estudio se inicia con las funciones $\log x$ y e^x. Por el teorema 7.2 se tiene que la función log es creciente en $(0, \infty)$; por tanto, como $e < 4$,

$$\log(4) > \log(e) = 1 \qquad [7.6]$$

Por otro lado, dado un número real arbitrario $M > 0$, existe un número natural n tal que $n > M$, y, por [7.6], resulta que si $x > n$, entonces

$$\log x > \log(4^n) = n \cdot \log 4 > n \cdot 1 > M$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \to \infty} \log x = \infty \qquad [7.7]$$

En la sección referente a la función exponencial, se definió e^x como la función inversa de $\log x$; por tanto, e^x es una función creciente que está definida en todo $\mathbb{R}$.

PROPOSICION 7.1 e^x tiende a ∞ cuando x tiende a ∞.

Demostración

Dado un número real arbitrario M, existe un número natural n tal que $n > M$; por tanto, como e^x es creciente, se tiene que

$$M < n < 2^n < e^n < e^x, \quad \text{si } x > n$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad [7.8]$$

Si u es un número real, $0 < u < 1$, entonces $1/u > 1$, por tanto, resulta que

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} (-\log x) = -\infty \qquad [7.9]$$

Así mismo, para la función e^x, y debido a [7.8], se tiene que

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \qquad [7.10]$$

Más adelante se compararán entre sí los crecimientos de las funciones e^x y la identidad x, cuando x crece en forma indefinida. Para esto, primero se estudia la función $x - \log x$.

PROPOSICION 7.2 La función $f(x) = x - \log x$ definida para todo $x > 0$, es creciente para $x > 1$ y tiende a ∞ cuando x tiende a ∞.

Demostración

Al derivar la función $f(x)$, se obtiene

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x},$$

la cual se anula en $x = 1$ y es positiva para $x > 1$. Esto demuestra la primera afirmación acerca de $f(x)$. Para demostrar la segunda, se observa que

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > \frac{1}{2}, \quad \text{si} \quad x > 2$$

Por tanto, si se aplica el teorema del valor medio a f en $[e, x]$, donde $x > e$, se tiene que existe y, $e < y < x$, tal que

$$(x - \log x) - (e - \log e) = \left(1 - \frac{1}{y}\right)(x - e) > \tfrac{1}{2}(x - e),$$

de donde

$$x - \log x > e - 1 + \tfrac{1}{2}(x - e)$$

Como la expresión de la derecha tiende a ∞ cuando x tiende a ∞, resulta que

$$\lim_{x\to\infty} (x - \log x) = \infty$$

COROLARIO 7.4 El cociente

$$\frac{e^x}{x}$$

tiende a ∞ cuando x tiende a ∞.

Demostración
Por la proposición 7.2, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{(x - \log x)} = \infty$$

COROLARIO 7.5 El cociente

$$\frac{x}{\log x} \qquad [7.11]$$

tiende a ∞ cuando x tiende a ∞.

Demostración
Si hacemos $y = \log x$, entonces $x = e^y$ y el cociente [7.11] puede escribirse como

$$\frac{e^y}{y}$$

Ahora bien, si x tiende a ∞, entonces $y = \log x$ también tiende a ∞, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log x} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y} = \infty$$

Este corolario permite calcular expresiones del tipo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m},$$

con m igual a cualquier entero.

PROPOSICION 7.3 Si m es un entero cualquiera, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$$

Demostración
Supóngase que $m > 0$. Sea $f(x) = e^x/x^m$. Entonces, $\log f(x) = x - m \log x$. Al sacar $\log x$ como factor común en la expresión de la derecha, se obtiene

$$\log f(x) = \log x \left(\frac{x}{\log x} - m\right)$$

Ahora bien, se sabe que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log x} = \infty$$

Como m es un número entero positivo fijo, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \log f(x) = \lim_{x\to\infty} (\log x)\cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{\log x} - m\right) = \infty,$$

por lo que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\log f(x)} = \infty$$

Si $m \leqslant 0$, es claro que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$$

EJEMPLO
Demuéstrese que

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x = 0$$

Si se hace $x = 1/t$, entonces la función $\sqrt{x}\log x$ queda expresada así,

$$\sqrt{x}\log x = \sqrt{\frac{1}{t}}\log\frac{1}{t} = -\frac{\log t}{\sqrt{t}}$$

Ahora bien, cuando t tiende a ∞, entonces $x = 1/t$ tiende a 0^+, por tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{\log t}{\sqrt{t}}\right)$$

Para calcular el límite de la derecha en la expresión anterior, se hace $s = \log t$, obteniéndose

$$\frac{\log t}{\sqrt{t}} = \frac{s}{e^{s/2}}$$

Además, s tiende a ∞ cuando t tiende a ∞, por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} \left(-\frac{\log t}{\sqrt{t}}\right) = -\lim_{s\to\infty} \frac{s}{e^{s/2}} = -\lim_{u\to\infty} \frac{2u}{e^u}$$

Esta última expresión se obtiene haciendo $u = s/2$. Si se utiliza el corolario 7.4, se observa con facilidad que este último límite es igual a cero.

Esta sección finaliza con el análisis de un límite con el que se obtiene el número real e.

PROPOSICION 7.4 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\; + \frac{}{t}\right)^t = e.$

Demostración

Si se hace

$$f(t) = \left(\; + \frac{1}{t}\right)^t$$

para todo t real, $t > 0$, entonces

$$\log f(t) = t \log\left(\; + \frac{1}{t}\right)$$

Así, para probar la proposición basta demostrar que

$$\lim_{t\to\infty} t \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1 \qquad [7.12]$$

Para esto se observa que

$$t \log\left(\; + \frac{}{t}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}$$

Si se hace $h = 1/t$, entonces [7.12] equivale al límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1 + h)}{h} = 1$$

Pero la expresión de la izquierda es la derivada de $\log x$ en 1, que se sabe es igual a 1. Con lo que queda probada la proposición.

Sabiendo que

$$\lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

se probará que $e \leqslant 3$, como se afirmó en la página 240.

A partir de la definición de logaritmo y al observar la figura 7. , concluimos que

$$\log\left(\; + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

para todo número natural n, es decir,

$$n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1;$$

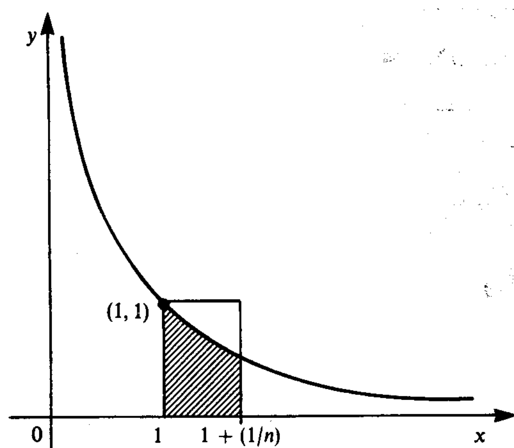


Figura 7.11

por tanto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

Se probará que

$$e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \qquad [7.13]$$

En vista de lo anterior, e es cota superior del conjunto considerado. Por otra parte, sea $\varepsilon > 0$, como $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, se sabe que existe $M > 0$ tal que

$$e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{t}\right)^t < e + \varepsilon$$

si $t > M$, en particular si $n > M$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

con lo que [7.13] queda probado.

Por el teorema del binomio,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{n!}{(n-2)!2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{(n-3)!3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}\\ &= 2 + \frac{n!}{(n-2)!2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

Sea $2 \leqslant i \leqslant n$. Entonces

$$\frac{n!}{(n-i)!i!} \cdot \frac{1}{n^i} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(i-1))}{i!} \cdot \frac{1}{n^i} =$$

$$= \frac{1}{i!} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(i-1)}{n} < \frac{1}{i!}$$

De donde

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} <$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \left(\frac{1/2 - 1/2^n}{1/2}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3$$

Es decir, 3 es también cota superior del conjunto

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

De la definición de supremo se sigue que $e \leqslant 3$.

EJERCICIOS

7.1 En los incisos siguientes, calcúlense los logaritmos indicados, usando estas aproximaciones.
$\log 2 = 0.6931$, $\log 3 = 1.0986$, $\log 10 = 2.3025$.

a) $\log 4$ b) $\log 15$ c) $\log 8$
d) $\log 9$ e) $\log 12$ f) $\log \sqrt{30}$
g) $\log \frac{2}{3}$ h) $\log \sqrt[4]{72}$ i) $\log 0.25$
j) $\log \sqrt[3]{1.25}$

7.2 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Pruébese que para todo x e y reales se cumplen las igualdades siguientes, conocidas como leyes de los exponentes.

a) $a^{x+y} = a^x a^y$ b) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
c) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$ d) $(a \cdot b)^x = a^x b^x$
e) $(a/b)^x = a^x/b^x$

7.3 Con la notación del ejercicio anterior, pruébese que si $x > 0$, entonces $a < b$ si, y sólo si, $a^x < b^x$. Pruébese también que si $a > 1$, entonces $x < y$ si, y sólo si, $a^x < b^y$.

7.4 Pruébese que si k es cualquier entero mayor que 1, entonces

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}<\log k<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}$$

7.5 Utilícese la regla de la cadena para demostrar

a) $(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$

b) $(\log f(x))' = f'(x)/f(x)$

Siendo $f(x)$ una función derivable en cada punto donde están definidas las composiciones correspondientes.

7.6 Derívense las funciones siguientes:

a) $\log(3x-2)$ b) $\log\cos x$

c) $\log(2x+3)$ d) $\log x^3+(\log x)^3$

e) $\operatorname{sen}\log x$ f) $\log\operatorname{sen} x$

g) $\dfrac{\log(e^x+1)}{\log(e^x-1)}$ h) $\log(\log x)$

(¡Cuidado con el dominio de log!)

7.7 Mediante la derivación logarítmica, calcúlense las derivadas de las funciones siguientes:

a) e^{x^x} b) $\dfrac{(x^2+3)(2x+1)^{3/2}}{\sqrt[3]{(x+1)(x^3+2)}}$ c) x^{x^x}

d) 3^x e) $x^a\cdot a^x$ f) $x^{\operatorname{sen} x}$

g) $5^{\sec x}$ h) $(\log x)^x$ i) 3^{2x+1}

7.8 Pruébense las fórmulas para las funciones hiperbólicas inversas que aparecen en la página 247.

7.9 Pruébense las identidades siguientes:

a) $\cosh x+\operatorname{senh} x=e^x$

b) $\cosh x-\operatorname{senh} x=e^{-x}$

c) $\operatorname{senh}(-x)=-\operatorname{senh} x$

d) $\cosh(-x)=\cosh x$

e) $\operatorname{senh}(x+y)=\operatorname{senh} x\cosh y+\cosh x\operatorname{senh} y$

f) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\operatorname{senh} x\operatorname{senh} y$

g) $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$

h) $\tanh 2x=\dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

i) $\cosh(x/2)=\dfrac{1+\cosh x}{2}$

j) $\tanh(x/2)=\dfrac{\operatorname{senh} x}{1+\cosh x}$

k) $\operatorname{senh} x+\operatorname{senh} y=2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)$

7.10 Derívense las funciones siguientes:

a) $\operatorname{senh} 3x$ b) $\operatorname{senh}^2 2x$ c) $\dfrac{1 + \cosh x}{1 - \cosh x}$

d) $\log \operatorname{senh} x$ e) $\dfrac{\cot x}{\coth x}$ f) $\coth(\cot x)$

g) $\coth^{-1}(\sec x)$ h) $\operatorname{senh}^{-1} 4x$ i) $\cosh^{-1} x$

j) $\dfrac{1}{\operatorname{senh}^{-1} x^2}$ k) $\log \cosh^{-1} 4x$ l) $\operatorname{senh}^{-1} 3x$

m) $\log \sqrt[5]{1 + 5x^3}$ n) $\log(x\sqrt{x^2 + a^2})$ o) $\log \sqrt[3]{4x^2 + 7x}$

p) $\log(x\sqrt{x^2 + 1})$ q) $\log \dfrac{x^2(2x - 1)^3}{(x + 5)^2}$ r) $\log \dfrac{\tan^2 x}{x^2}$

s) $x^7 e^{-x^2}$ t) $\log \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ u) $\log \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

v) $(\cos x)^x$ w) $e^x + e^x$ x) $\log \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

y) $e^{\operatorname{sen} x}$ z) $x(e^{-x})(\log x^3)$

7.11 Represéntense en forma gráfica las funciones siguientes:

a) $\operatorname{senh} 2x$ b) $\coth^{-1}(x - 1)$ c) $\operatorname{senh}(x + 1)$
d) $\tanh^{-1}(1/2x)$ e) $a \cosh(x/a)$

7.12 Calcúlense los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x$ d) $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^t$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^{mx}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right)^{2x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \tan^2 \sqrt{x})^{1/(2x)}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\csc x}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{e^x - e}{x - 1}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \tan x)^{1/x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\log(1 + x)}{x}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1 + 10x)}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$ n) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1-x} - 1)$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}\right)$ p) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x}$

7.13 En el ejercicio anterior, ¿se puede usar la regla de L'Hôpital?

Isaac Newton
(1642 a 1727)

Nacido en Woolsthorpe, Inglaterra, su pensamiento científico ha trascendido hasta nuestros días y puede afirmarse, con poco riesgo de errar, que el espectacular avance de la ciencia en su conjunto, aun en esta época, está animado por el espíritu de su obra.

Newton ingresó como estudiante al Trinity College de Cambridge, en 1661. Estuvo entonces a punto de cambiar sus estudios de filosofía natural (ciencias) por los de leyes. Con el apoyo de Barrow, estudió la Geometrie *de Descartes y los trabajos de Copérnico, Kepler, Galileo, Wallis y el propio Barrow, lo que probablemente le llevara a exclamar más tarde: «Si he visto un poco más lejos que los demás, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes.»*

Cuando terminó sus estudios en la universidad, una epidemia de peste en el área de Londres le obligó a dejar Cambridge y marchar a la granja de su madre durante el periodo de 1665 a 1666. Por ese tiempo, inició su extraordinario trabajo en mecánica, matemáticas y óptica; estableció la ley de la gravitación, obtuvo un método general para trabajar los problemas del cálculo y descubrió que la luz blanca, como la solar, está compuesta en realidad de todos los colores del espectro, desde el violeta hasta el rojo. Para aquilatar la grandeza del genio de Newton, baste decir que fue el arquitecto de la mecánica moderna, la dinámica y la mecánica celeste.

En 1667, regresa a Cambridge para obtener el grado de maestro, y es elegido miembro del Trinity College. Todo este tiempo mantuvo en secreto sus resultados. En 1669, Barrow renuncia a su puesto de profesor en favor de Newton. Debido a un temor anormal a la crítica, éste no publica sus descubrimientos hasta 1672, cuando lo hace con su trabajo sobre la composición de la luz, el cual fue criticado con dureza por sus contemporáneos, incluyendo a Hooke y a Huygens. Lo mismo sucede al publicarse su teoría corpuscular de la luz (1675), lo que lo decidió a no hacerlo más. Sin embargo, en 1704 aparecen sus obras Principia *y* Opticks*; y, en 1707,* Arithmetica universalis.

Escribió una obra difícil de entender, sin duda escrita así para evitar críticas, y que, sin embargo, le dio fama: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.

Aplicó la ley de la gravitación al movimiento planetario. Abordó, además, los campos de la hidrostática, la hidrodinámica, la química y la teología.

En 1695 tuvo un puesto en la Casa de Moneda Británica y en 1703 llegó a

ser presidente de la Royal Society. Fue nombrado Caballero del Imperio en 1705.

En forma paralela a la vida de Newton se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Cruz, Sor Juana Inés de la: *Inundación castálida,* 1689; *Carta athenagórica,* 1690; *Los empeños de una casa,* 1682; *El divino Narciso,* 1691.
Defoe, Daniel: *Robinson Crusoe,* 1719; *Moll Flanders,* 1722.
La Fontaine: *Fábulas,* 1668; *Fábulas,* 1678.
Moliere: *Las preciosas ridículas,* 1659; *La escuela de las mujeres,* 1662; *Tartufo,* 1664; *El burgués gentilhombre,* 1670.
Perrault: *Cuentos,* 1697.

MUSICA

Corelli: *Sonatas op. 1,* 1681; *Sonatas op. 5,* 1700.
Purcell: *Dido y Eneas,* 1689; *King Arthur,* 1691.
Vivaldi: *Sonatas op. 1,* 1705; *Estroarmónico,* 1712; *Nerone,* 1715; *Las cuatro estaciones,* 1726.

PINTURA

Coello, Claudio: *Carlos I adorando la Sagrada Forma,* 1685.
Puget: *Perseo,* 1684.
Ricce: *Virgen con santos,* 1708.

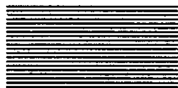
ARQUITECTURA

Broant, Liberal: *Los inválidos,* París, 1676.
Se construye la catedral de Córdoba, México, 1687.
Churriguera: Retablo de San Esteban, Salamanca, España, 1693.
Verbruggen: Púlpito de la catedral de Bruselas, Bélgica, 1699.



Isaac Newton

8



SUCESIONES Y SERIES

DEFINICIONES Y NOTACIONES

Hasta ahora se han analizado sólo las funciones definidas en intervalos. En este capítulo se estudiarán funciones que tienen por dominio al conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$

DEFINICION 8.1* *Una sucesión de números reales es una función*

$$s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

del conjunto de los números naturales en el de los números reales.

Puesto que las sucesiones son un tipo especial de funciones, es posible utilizar para ellas las mismas notaciones que para estas últimas. Sin embargo, se acostumbra, en lugar de denotar a una sucesión s por

$$s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

y a la imagen de un natural n bajo s por $s(n)$, denotar a esta última por x_n y a la sucesión por

$$(x_1, x_2, \ldots) \quad ; \quad (x_n)_{n=1}^{\infty},$$

o bien, cuando no haya lugar a confusión, por (x_n).

(Se utilizarán también las letras m y k para los índices de los elementos x.)

En otras palabras, $(x_1, x_2, \ldots)$, u otra de las notaciones anteriores, representa la función que está definida en el conjunto de los números naturales y que asocia al natural 1 el real x_1, al natural 2 el real x_2, etc.

Para cada número natural n llamamos a x_n el n-ésimo término de la sucesión.

---

* Es posible definir sucesiones en conjuntos distintos de $\mathbb{R}$. En este capítulo sólo se considerarán sucesiones de números reales.

En general, para definir una sucesión se da una fórmula que determine su n-ésimo término. Por ejemplo, las fórmulas

$$x_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$y_n = n + 1$$

$$z_n = 3^n$$

definen tres sucesiones, cuyos primeros cinco términos son, respectivamente,

$$1, \tfrac{4}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{8}{5}, \tfrac{5}{3}$$

$$2, 3, 4, 5, 6$$

$$3, 9, 27, 81, 243$$

Las sucesiones definidas por estas fórmulas quedan denotadas, respectivamente, por

(a) $\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ o $\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$

(b) $(n+1)_{n=1}^{\infty}$ o $(n+1)$

(c) $(3^n)_{n=1}^{\infty}$ o (3^n)

En algunos casos, para referirse a una sucesión en particular, sólo se indican algunos de sus primeros términos, cuando es posible inferir, a partir de ellos, el procedimiento a seguir para determinar los restantes. Por ejemplo, al escribir

(d) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...)$

(e) $(2, 4, 6, 8, 10, ...)$

(f) $(-1, 1, -1, 1, ...)$

nos referimos a las sucesiones

$$\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right), \quad (2n) \quad \text{y} \quad ((-1)^n)$$

Ciertas sucesiones se definen inductivamente. Sin entrar en detalles, esto significa que a partir de cierto natural, cada término de la sucesión está definido en función de sus antecesores.

EJEMPLOS

1. Sea $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ para $n \geqslant 4$.

Con esto se define una sucesión cuyos primeros siete términos son

$$0, 0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{11}{16}$$

2. Sea $x_1 = 1$ y $x_n = nx_{n-1}$ para $n \geqslant 2$.
Queda definida entonces una sucesión, cuyos primeros cinco términos son

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120$$

Se acostumbra denotar al n-ésimo término x_n de esta sucesión por $n!$ y denominarlo el factorial de n. Así, por ejemplo,

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120$$

Nótese que

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

se define $0! = 1$.

OPERACIONES CON SUCESIONES

Las reglas para formar sumas, productos y cocientes de funciones, y el producto de un número real por una función, son aplicables a las sucesiones, pues éstas son sólo una clase particular de funciones; por consiguiente, si (x_n) e (y_n) son dos sucesiones y $c \in \mathbb{R}$, se define:

1) $(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$
2) $(x_n)_{n=1}^{\infty}(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$
3) $c(x_n)_{n=1}^{\infty} = (cx_n)_{n=1}^{\infty}$
4) Si, además, $y_n \neq 0$ para todo $n \geqslant 1$, entonces se define

$$\frac{(x_n)_{n=1}^{\infty}}{(y_n)_{n=1}^{\infty}} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLOS

1. $(2n)_{n=1}^{\infty} + (-n^2)_{n=1}^{\infty} = (2n - n^2)_{n=1}^{\infty} = (1, 0, -3, -8, -15, \ldots)$
2. $(n+1)_{n=1}^{\infty}(n-1)_{n=1}^{\infty} = (n^2 - 1)_{n=1}^{\infty} = (0, 3, 8, 15, 24, \ldots)$
3. $3(n!)_{n=1}^{\infty} = (3n!)_{n=1}^{\infty} = (3, 6, 18, 72, 360, \ldots)$
4. $\dfrac{((-1)^n)_{n=1}^{\infty}}{(2^{n-1})_{n=1}^{\infty}} = \left(\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)_{n=1}^{\infty} = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots)$
5. $\dfrac{(n)_{n=1}^{\infty}}{(n-1)_{n=1}^{\infty}}$ no está definida.

SUBSUCESIONES

Dada una sucesión (x_n) es posible construir otra en la forma siguiente:

Táchense en (x_n) un número infinito o finito de términos, con la condición que el número de términos no tachados sea infinito. Se obtiene así una sucesión (y_k) donde, para cada número natural k, y_k es el k-ésimo término no suprimido en (x_n).

Toda sucesión (y_k) obtenida a partir de una sucesión (x_n) mediante el procedimiento anterior, es llamada una subsucesión de (x_n).

EJEMPLOS

1. $(y_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 3, 5, 7, 9, ...)$ es una subsucesión de

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 2, 3, 4, 5,$$

En este caso,

$$y_1 = x_1, \; y_2 = x_3, \; y_3 = x_5,$$

es decir,

$$y_k = x_{2k-1},$$

ya que (y_k) se obtiene de (x_n) al tachar de ésta a todos los términos con índice par.

2. $(z_k)_{k=1}^{\infty} = (16, 64, 144, 256, 400, ...) = ((4k)^2)_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de (n^2).
3. $(w_k)_{k=1}^{\infty} = (13, 14, 15, 16, 17, ...)$ es una subsucesión de (n).

En el ejemplo 3 se suprimieron los primeros doce términos. En general, si (x_n) es una sucesión y n_0 un número natural, entonces la sucesión $(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...)$ es una subsucesión de (x_n). Este tipo de subsucesiones se denota por

$$(x_{n_0+n})_{n=0}^{\infty}, \quad \text{o bien} \quad (x_n)_{n=n_0}^{\infty}$$

Se observa que, si (y_k) es una subsucesión de (x_n), entonces cada elemento y_k coincide con algún elemento x_{n_k} para algún número natural $n_k \geqslant k$. Sin embargo, para que una sucesión (y_k) sea subsucesión de (x_n) no basta que cada y_k coincida con algún término de (x_n). Por ejemplo:

4. Cada término de la sucesión $(y_k) = (4, 3, 6, 5, 8, 7, ...)$ coincide con alguno de la sucesión

$$(x_n) = (n)$$

Pero (y_k) no puede obtenerse de (x_n) con sólo tachar ciertos términos de esta última sucesión, pues, si así fuera, el número 3, por ejemplo, debería aparecer en (y_k) antes que el número 4. Por tanto, (y_k) no es una subsucesión de (x_n).

En forma más precisa, puede establecerse la definición siguiente:

DEFINICION 8.2 *Una sucesión* (y_k) *es una subsucesión de* (x_n) *si existe una sucesión* (n_k) *de números naturales tal que*

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$$

e $y_k = x_{n_k}$ *para cada número natural k. (Nótese que* $n_k \geqslant k$ *para todo k.)*

En el ejemplo 2 de esta sección, la sucesión (n_k) es

$$(4, 8, 12, 16, 20, ...)$$

En efecto, en este caso,

$$4 < 8 < 12 < 16 < 20 < \cdots$$

y

$$z_1 = x_4, z_2 = x_8, z_3 = x_{12}, ...,$$

donde $x_n = n^2$.

Por el contrario, en el ejemplo 4, la única sucesión (n_k) de números naturales para la que se tiene $y_k = x_{n_k}$, para todo número natural k, es

$$(n_k) = (4, 3, 6, 5, ...),$$

la cual claramente no satisface

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

En los ejemplos 1 y 3 de esta sección, determínense las sucesiones (n_k) correspondientes.

SUCESIONES CONSTANTES, MONOTONAS Y ACOTADAS

Sucesiones constantes

DEFINICION 8.3 *Una sucesión se llama* constante *si todos sus términos son iguales entre sí.*

EJEMPLOS

1. (0, 0, 0, ...)
2. (1/2, 1/2, 1/2, ...)

   Es claro que si (x_n) es una sucesión y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$c(x_n) = (c, c, c, ...)(x_n),$$

o sea, el producto de un número real por una sucesión puede interpretarse como un caso particular del producto de dos sucesiones.

Sucesiones monótonas, crecientes y decrecientes

DEFINICION 8.4 *Una sucesión (x_n) es creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo número natural n. Cuando la desigualdad es estricta, se dice que (x_n) es estrictamente creciente.*

Si en la definición anterior se invierte el sentido de la desigualdad, se obtienen, entonces, las definiciones de *sucesión decreciente* y *estrictamente decreciente.*

Es claro que (x_n) es creciente si, y sólo si, $(-x_n)$ es decreciente, afirmación también válida si se agrega la palabra *estrictamente.*

DEFINICION 8.5 *Una sucesión se llama monótona si es creciente o decreciente.*

EJEMPLOS

1. Las sucesiones constantes son crecientes y decrecientes.
2. $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots)$ es creciente pero no estrictamente creciente.
3. (2^n) es estrictamente creciente.
4. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ es estrictamente decreciente.

Las sucesiones siguientes no son monótonas:

5. $((-1)^n)$
6. $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \ldots)$

Sucesiones acotadas

DEFINICION 8.6 *Una sucesión (x_n) está acotada superiormente si existe un número real M tal que*

$$x_n \leqslant M \quad \textit{para todo } n \geqslant 1$$

M es llamada cota superior de la sucesión.

DEFINICION 8.7 *Una sucesión (x_n) está acotada inferiormente si existe un número real m tal que*

$$m \leqslant x_n \quad \textit{para todo} \quad n \geqslant 1$$

m es llamada cota inferior de la sucesión.

EJEMPLOS
Las sucesiones
1. $(1/n)$
2. $(-n)$
   están acotadas superiormente, en tanto que
3. $(n!)$
4. (n)
   no lo están.
Las sucesiones
5. $\left(-\dfrac{n+1}{n}\right)$
6. (n)
   están acotadas inferiormente.
   Existen sucesiones no acotadas ni superior ni inferiormente.
   Por ejemplo:
   (a) $(1, -1, 2, -2, 3, -3, ...)$
   Aquellas sucesiones acotadas superior e inferiormente se llaman *sucesiones acotadas*. Es decir:

DEFINICION 8.8 *Una sucesión (x_n) es acotada si existen números reales m y M tales que*

$$m \leqslant x_n \leqslant M \quad \text{para todo} \quad n \geqslant 1$$

Las sucesiones constantes y aquellas consideradas en la definición 8.5 (Ejemplos 2, 4, 5 y 6) y en la definición 8.7 (Ejemplos 1 y 5) son acotadas; las restantes en esta sección no lo son.

Supóngase que para una sucesión (x_n) existen números reales m y M tales que

$$m \leqslant x_n \leqslant M \quad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Es claro que puede encontrarse un número real $K > 0$ tal que

$$-K \leqslant m \quad \text{y} \quad M \leqslant K$$

Así,

$$-K \leqslant x_n \leqslant K \quad \text{para todo} \quad n \geqslant 1$$

Es decir, la distancia x_n a 0 es menor o igual que K (véase Fig. 8.1), por lo que

$$|x_n| \leqslant K \quad \text{para todo} \quad n \geqslant 1$$

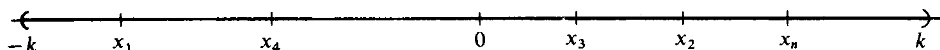


Figura 8.1

Con esto, la definición 8.8 puede escribirse de la manera siguiente:

DEFINICION 8.9 *(x_n) es una sucesión acotada si, y sólo si, existe un número real $K > 0$ tal que*

$$|x_n| \leqslant K \quad \text{para} \quad n \geqslant 1$$

No es difícil probar que si una sucesión es constante, monótona, acotada superior o inferiormente o acotada, entonces toda subsucesión tiene la propiedad correspondiente.

CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Sucesiones convergentes

Las funciones definidas en intervalos de la forma (a, ∞) y las sucesiones tienen en común el estar definidas en conjuntos no acotados superiormente.

Al recordar la definición del concepto correspondiente al símbolo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha,$$

introducido para las funciones definidas en intervalos de la forma (a, ∞), resulta natural establecer la definición siguiente:

DEFINICION 8.10 *Una sucesión (x_n) converge a un número real α cuando n tiende a ∞, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que*

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N \qquad \text{(Fig. 8.2)}$$

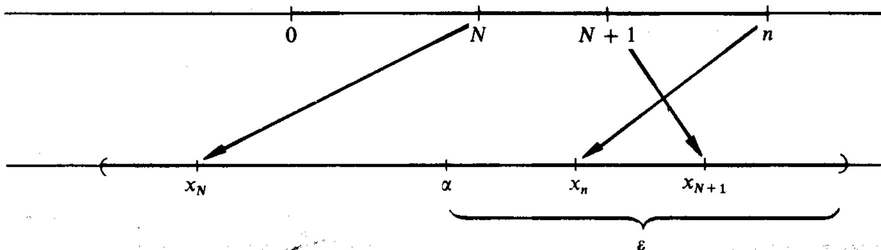


Figura 8.2

En este caso se escribe $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$, o bien $\lim x_n = \alpha$, y se dice que (x_n) es una sucesión convergente cuyo límite es α. En particular, si $\lim x_n = 0$, se dice que (x_n) es una *sucesión nula*.

Esta definición, en términos de intervalos, equivale a decir que para cada intervalo abierto J, con centro en α, existe un número natural N tal que *a lo más* $x_1, x_2, ..., x_{N-1}$ no pertenece a J.

EJEMPLOS

1. La sucesión $(0, 0, 0, ...)$ es nula.
2. La sucesión constante $(c, c, c, ...)$ converge a c.
3. $(1/n)$ es nula.

   Prueba Sea $\varepsilon > 0$. Existe un número natural N tal que $N > 1/\varepsilon$. Por tanto,

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

4. $((-\tfrac{1}{2})^n)$ es nula.

   Prueba Sea $\varepsilon > 0$. Existe un número natural N tal que $N > \dfrac{\log(1/\varepsilon)}{\log 2}$. Así, $n \geqslant N$ implica que $\log 2^n > \log(1/\varepsilon)$; es decir,

$$|(-\tfrac{1}{2})^n| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Sucesiones divergentes

Las sucesiones no convergentes se denominan divergentes. Entre éstas, destacan aquellas para las cuales los valores x_n crecen o decrecen indefinidamente cuando n tiende a ∞; es decir, para las que se tiene

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty, \quad \text{o bien} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = -\infty,$$

donde estos símbolos corresponden a los conceptos que pueden derivarse de los correspondientes que fueron introducidos para las funciones definidas en intervalos (a, ∞). En otras palabras:

DEFINICION 8.11 *Una sucesión (x_n) tiende a ∞ cuando n tiende a ∞, si para cada $M > 0$ existe un número natural N tal que*

$$x_n > M \quad \text{si} \quad n > N \qquad \text{(Fig. 8.3)}$$

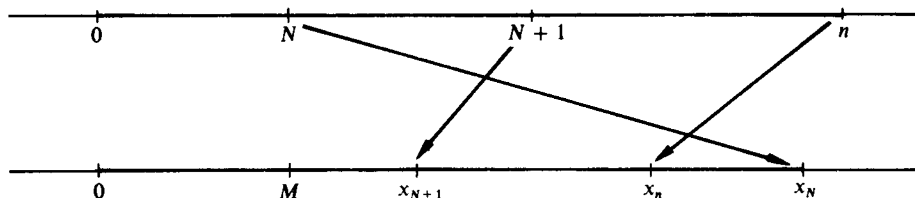


Figura 8.3

En este caso, se escribe $\lim x_n = \infty$ *y se dice que la sucesión diverge a* ∞.

DEFINICION 8.12 *Una sucesión* (x_n) *tiende a* $-\infty$ *cuando* n *tiende a* ∞, *si para cada* $M > 0$ *existe un número natural* N *tal que*

$$x_n < -M \quad \text{si} \quad n \geqslant N \qquad \text{(Fig. 8.4)}$$

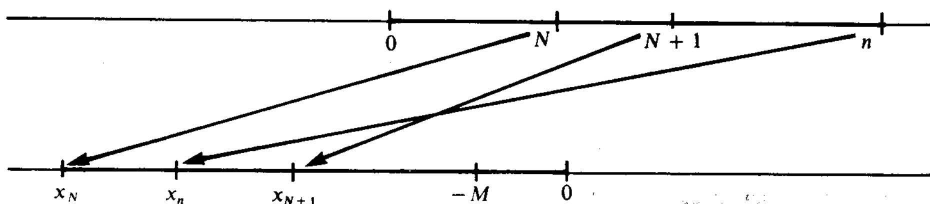


Figura 8.4

En este caso se escribe $\lim x_n = -\infty$ y se dice que la sucesión diverge a $-\infty$. Si una sucesión diverge a ∞ o $-\infty$, entonces no puede ser acotada.

Como se verá en el primero de los ejemplos siguientes, existen sucesiones divergentes que no divergen a ∞ ni a $-\infty$.

EJEMPLOS

1. $((-1)^n)$ es divergente.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Tómese una vecindad J_0 de α de longitud menor que 2. En J_0 no pueden estar 1 y -1, pues, si así fuera, entonces la longitud de J_0 sería mayor que 2 (Fig. 8.5). Por tanto, no existe un número natural N tal que

$$x_n \in J_0 \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Es decir, $\lim x_n \neq \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$; además, ya que $((-1)^n)$ es acotada, no puede divergir a ∞ ni a $-\infty$.

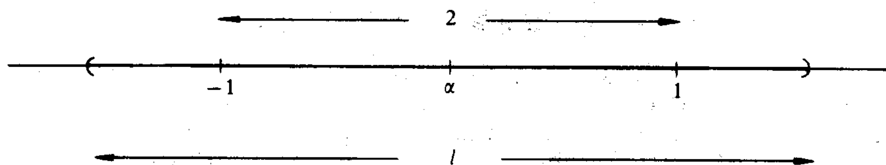


Figura 8.5

2. Sea $x > 1$. La sucesión (x^n) diverge a ∞.

Sea $M > 0$. Existe un número natural N tal que $N > \log M/\log x$. Si $n \geqslant N$, entonces $\log x^n > \log M$; por lo que $x^n > M$ si $n \geqslant N$.

Algunas proposiciones de las sucesiones convergentes

PROPOSICION 8.1 Una sucesión converge a un número real α si, y sólo si, todas sus subsucesiones convergen a α.

Demostración
Supóngase que (x_n) converge a α e (y_k) es una subsucesión de (x_n). Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe un número natural N tal que

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Como se observó en la sección sobre subsucesiones, para cada número natural k, se tiene que $y_k = x_{n_k}$ para alguna $n_k \geqslant k$. Por tanto,

$$|y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k \geqslant N$$

La otra parte de la proposición se sigue de que toda sucesión es subsucesión de sí misma.

PROPOSICION 8.2 Sea (x_n) una sucesión. Si existe un número natural n_0 tal que la subsucesión $(y_k) = (x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ converge a α, entonces (x_n) converge a α.

En otras palabras, la proposición establece: si en una sucesión es posible quitar una «eneada inicial» de manera que la subsucesión resultante converja a α, entonces la sucesión misma converge a α. *(La convergencia de una sucesión no depende de sus términos iniciales.)*

Demostración
Sea $\varepsilon > 0$. Existe un número natural K tal que

$$|y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k \geqslant K;$$

es decir,

$$|x_{n_0+k} - \alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad k \geqslant K$$

Tómese $N = n_0 + K$,

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \text{ si } n \geqslant N \text{ (obsérvese que } x_n = x_{n_0+n-n_0})$$

PROPOSICION 8.3 Si $\lim x_n = \alpha$, entonces $\lim |x_n| = |\alpha|$.

Demostración
Sea $\varepsilon > 0$. Existe un número natural K tal que

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Como $||x_n| - |\alpha|| < |x_n - \alpha|$ para todo $n \geqslant 1$, se sigue que

$$||x_n| - |\alpha|| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Al considerar la sucesión $((-1)^n)$, es evidente que el recíproco de la proposición anterior no es válido. Sin embargo, $\lim |x_n| = 0$, sí implica que $\lim x_n = 0$.

TEOREMA 8.1 **Toda sucesión convergente es acotada.**

Demostración

Sea (x_n) una sucesión convergente y supóngase que su límite es igual a α. Para $\varepsilon = 1$ existe un número natural N tal que $|x_n - \alpha| < 1$ si $n \geqslant N$. Tómese un número real K mayor que todos los números siguientes: $1 + |\alpha|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|$. Se tiene, entonces, que $|x_n| < K$ para todo número natural n.

TEOREMA 8.2 **Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones que convergen a α y β,** respectivamente, y c un número real. Entonces:

1) $\lim c(x_n) = c\alpha$.
2) $\lim (x_n + y_n) = \alpha + \beta$.
3) $\lim (x_n y_n) = \alpha\beta$.
4) Si además, $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\beta \neq 0$, entonces $\lim x_n/y_n = \alpha/\beta$.

Demostración

1) Si $c = 0$, la afirmación es obvia. Ahora supóngase que $c \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Tómese $\varepsilon' = \varepsilon/|c|$; por hipótesis, existe un número natural N tal que

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon' \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Por tanto,

$$|cx_n - c\alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

2) Sea $\varepsilon > 0$. Tómese $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Por hipótesis, existen dos números naturales N_1 y N_2 tales que

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon' \quad \text{si} \quad n \geqslant N_1$$

y también,

$$|y_n - \beta| < \varepsilon' \quad \text{si} \quad n \geqslant N_2$$

Tómese $N = N_1 + N_2$. Si $n \geqslant N$, entonces $n \geqslant N_1$ y $n \geqslant N_2$. Por consiguiente,

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon' \quad \text{e} \quad |y_n - \beta| < \varepsilon' \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Pero

$$|x_n + y_n - (\alpha + \beta)| \leqslant |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| \quad \text{para todo número natural } n$$

Por tanto,

$$|x_n + y_n - (\alpha + \beta)| < 2\varepsilon' = \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

3) Como $\{y_n\}$ es sucesión convergente, se tiene que es acotada. Sea K un número positivo tal que

$$|y_n| < K \quad \text{si} \quad n \geqslant 1$$

Sea $\varepsilon > 0$. Tómese $M = K + |\alpha| + 1$. Es claro que $M > K$ y $M > |\alpha|$; tómese $\varepsilon' = \varepsilon/2M$. Por hipótesis, existen N_1, N_2 números naturales tales que $|x_n - \alpha| < \varepsilon'$ si $n \geqslant N_1$ e $|y_n - \beta| < \varepsilon'$ si $n \geqslant N_2$; tómese $N = N_1 + N_2$. Si $n \geqslant N$, entonces,

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon' \quad \text{e} \quad |y_n - \beta| < \varepsilon'$$

Escríbase

$$x_n y_n - \alpha\beta \quad \text{como} \quad (x_n - \alpha)y_n + (y_n - \beta)\alpha$$

Así,

$$|x_n y_n - \alpha\beta| \leqslant |x_n - \alpha||y_n| + |y_n - \beta||\alpha| < |x_n - \alpha|M + |y_n - \beta|M$$

para todo $n \geqslant 1$.

Por tanto,

$$|x_n y_n - \alpha\beta| < 2\varepsilon' M = \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

4) Por 3) basta probar que $\text{lím}\, 1/y_n = 1/\beta$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Tómese $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon|\beta|^2}{2}$. Por hipótesis, existe N_1 tal que

$$|y_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2} \quad \text{si} \quad n \geqslant N_1;$$

de aquí que $1/|y_n| < 2/|\beta|$ si $n \geqslant N_1$.

Por otro lado, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - \beta| < \varepsilon'$ si $n \geqslant N_2$. Tómese $N = N_1 + N_2$. Si $n \geqslant N$, entonces $n \geqslant N_1$ y $n \geqslant N_2$. Además,

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|y_n - \beta|}{|y_n||\beta|} \quad \text{para todo} \quad n \geqslant 1$$

Así,

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\beta}\right| < \frac{2\varepsilon'}{|\beta|^2} = \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

PROPOSICION 8.4 Sean (x_n) e (y_n) sucesiones convergentes a α. Si (z_n) es una sucesión tal que $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (z_n) converge a α.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$; por hipótesis existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \text{ si } n \geqslant N_1 \quad \text{e} \quad |y_n - \alpha| < \varepsilon \text{ si } n \geqslant N_2$$

Puede encontrarse, procediendo igual que antes, $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$ implica que

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |y_n - \alpha| < \varepsilon$$

En particular, $n > N$ implica que

$$\alpha - \varepsilon < x_n \quad \text{e} \quad y_n < \alpha + \varepsilon$$

Por consiguiente,

$$\alpha - \varepsilon < z_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N;$$

es decir,

$$|z_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

El corolario siguiente se infiere de esta proposición y de la 8.2.

COROLARIO 8.1 Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones convergentes a α y $n_0 \in \mathbb{N}$. Si (z_n) es una sucesión tal que $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ si $n \geqslant n_0$, entonces (z_n) converge a α.

PROPOSICION 8.5 **El producto de una sucesión nula por una acotada es una sucesión nula.**

Demostración

Supóngase que (x_n) es nula e (y_n) es una sucesión acotada. Existe $K > 0$ tal que $0 \leqslant |x_n y_n| \leqslant K|x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De la proposición 8.4 y el teorema 8.2, se sigue que $(|x_n y_n|)$ es una sucesión nula y, por consiguiente, $(x_n y_n)$ lo es también.

PROPOSICION 8.6 Sean (x_n) una sucesión e (y_k) y (z_k) las subsucesiones de (x_n) que constan de todos los elementos x_n con índices par e impar, respectivamente. Entonces,

$$\text{lím}\, x_n = \alpha \quad \text{si, y sólo si,} \quad \text{lím}\, y_k = \text{lím}\, z_k = \alpha$$

De esta proposición se conluye de inmediato que $((-1)^n)$ es divergente.

La demostración de la proposición se deja como ejercicio para el lector.

PROPOSICION 8.7 **Sea (x_n) una sucesión nula, lím $e^{x_n} = 1$.**

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Tómese $\varepsilon' = \log(1 + \varepsilon)$. Así, $\varepsilon' > 0$. Como (x_n) es una sucesión nula, existe un número natural N tal que $n \geqslant N$; entonces,

$$|x_n| < \varepsilon'$$

Por consiguiente,

$$e^{|x_n|} - 1 < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

Sea $n \geqslant N$. Si

(a) $x_n \geqslant 0$, entonces $e^{x_n} \geqslant 1$.
Así,

$$|e^{x_n} - 1| = e^{|x_n|} - 1 < \varepsilon$$

(b) $x_n < 0$, entonces $e^{x_n} < 1$.
Así,

$$|e^{x_n} - 1| = 1 - e^{-|x_n|} = \frac{e^{|x_n|} - 1}{e^{|x_n|}} < \frac{\varepsilon}{e^{|x_n|}}$$

pero

$$\frac{1}{e^{|x_n|}} < 1$$

Por tanto,

$$|e^{x_n} - 1| < \varepsilon$$

Es decir,

$$|e^{x_n} - 1| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

En esta proposición, y en la 8.3, se tiene la situación siguiente:

A partir de una función $f: I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo, y una sucesión (x_n) que converge a $\alpha \in I$, se define una nueva sucesión (y_n) mediante la fórmula $y_n = f(x_n)$, y se prueba que ésta es convergente y tiene por límite a $f(\alpha)$.

En el teorema enunciado a continuación que incluye, como casos particulares, las proposiciones 8.3 y 8.7, se dan condiciones sobre la función f, la sucesión (x_n) y su límite α para tener la situación descrita.

TEOREMA 8.3 Sea $f: I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo, una función continua en $x_0 \in I$. Si (x_n) es una sucesión de puntos en I que converge a x_0, entonces $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$; como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$, $x \in I$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Por otro lado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \text{si} \quad n \geqslant N,$$

de donde

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

EJEMPLOS

1. Sea $\lim x_n = \alpha$; entonces,
   (a) $\lim x_n^2 = \alpha^2$.
   (b) $\lim \operatorname{sen} x_n = \operatorname{sen} \alpha$.
   (c) $\lim \cos x_n = \cos \alpha$.
   (d) $\lim e^{x_n} = e^{\alpha}$.
2. Si α y x_n, para $n \geqslant 1$, no son de la forma $(2m + 1)\pi/2$, entonces

$$\lim \tan x_n = \tan \alpha,$$
$$\lim \sec x_n = \sec \alpha$$

3. Si α y x_n, para $n \geqslant 1$, no son de la forma $m\pi$, entonces,

$$\lim \cot x_n = \cot \alpha,$$
$$\lim \csc x_n = \csc \alpha$$

4. Si α y x_n, para $n \geqslant 1$, son positivos, entonces,

$$\lim \log x_n = \log \alpha,$$
$$\lim 1/\sqrt{x_n} = 1/\sqrt{\alpha}$$

LIMITES IMPORTANTES

Las sucesiones siguientes son nulas:

1) (x^n), donde $|x| < 1$.
2) $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$.
3) $\left(\dfrac{1}{n^r}\right)$ con r racional positivo.
4) $\left(\dfrac{\log n}{n}\right)$.
5) $(x_n \log x_n)$, donde (x_n) es una sucesión nula de términos positivos.

Además,

6) $\lim \sqrt[n]{c} = 1$, con $c > 0$.
7) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Demostración

1) Si $x = 0$, la afirmación es obvia. Supóngase que $x \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un número natural N tal que

$$N > \frac{\log \varepsilon}{\log |x|}$$

Puesto que $|x| < 1$, se tiene $\log|x| < 0$.

Por tanto, si $n \geqslant N$, entonces

$$n \log|x| < \log \varepsilon;$$

o sea,

$$|x^n| = |x|^n < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

2) $0 \leqslant \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{n}{n}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n}\cdots\dfrac{2}{n}\dfrac{1}{n}$.

Pero

$$\frac{k}{n} \leqslant 1 \quad \text{para} \quad 2 \leqslant k \leqslant n$$

Por tanto,

$$0 \leqslant \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{para todo número natural } n.$$

Como $(1/n)$ es nula, se tiene (Proposición 8.4) $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

3) Sea q un número natural. Dado $\varepsilon > 0$, tómese

$$\varepsilon' = \varepsilon^q$$

Por ser $(1/n)$ una sucesión nula, se tiene que existe un número natural tal que

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon' \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

Por consiguiente,

$$\left|\frac{1}{n^{1/q}}\right| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

Se ha demostrado así que $(1/n^{1/q})$ es nula para cada número natural q. Por otra parte, sea r un número racional positivo. Existen dos números naturales p y q tales que $r = p/q$.

$(1/n^{p/q})$ es una subsucesión de $(1/n^{1/q})$ y, en consecuencia, es nula.

4) Como

$$\frac{\log n}{n} = \frac{2 \log n^{1/2}}{n} \quad \text{para} \quad n \geqslant 1,$$

basta demostrar que $(\log n^{1/2})$ es una sucesión nula.

La función $x - \log x$ es creciente en el intervalo $[1, \infty)$. [Su derivada es positiva en cada punto del intervalo $(1, \infty)$.]

En particular,

$$1 \leqslant x - \log x \quad \text{para todo} \quad x \geqslant 1$$

Como $n^{1/2} \geqslant 1$ para $n \geqslant 1$, se sigue que

$$0 \leqslant \frac{\log n^{1/2}}{n} \leqslant \frac{n^{1/2} - 1}{n} = \frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{n}$$

para $n \geqslant 1$.

Y, dado que $(1/n^{1/2})$ y $(1/n)$ son sucesiones nulas, se tiene

$$\lim \frac{\log n^{1/2}}{n} = 0$$

5) La función $f(x) = \log x + 2/\sqrt{x}$ es decreciente en el intervalo $(0, 1]$. [Su derivada es negativa en cada punto de $(0, 1)$.]

En particular,

$$\log x + 2/\sqrt{x} > 2$$

Así,

$$0 > x \log x > 2x - 2\sqrt{x} \quad \text{si} \quad x \in (0, 1)$$

Ya que la sucesión (x_n) es nula y de términos positivos, se tiene que existe $N > 0$ tal que $0 < x_n < 1$ si $n \geqslant N$. Por tanto,

$$2x_n - 2\sqrt{x_n} < x_n \log x_n < 0 \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Por el corolario 8.1, se concluye que $(x_n \log x_n)$ es una sucesión nula.

6) Para cada $n \geqslant 1$, sea $x_n = \log c^{1/n} = 1/n \log c$.

Es evidente que (x_n) es una sucesión nula.

Por la proposición 8.7 se tiene que

$(e^{x_n}) = (\sqrt[n]{c})$ converge a 1.

7) Para cada $n \geqslant 1$, sea $x_n = \log n^{1/n} = (1/n) \log n$.

Se probó (en 4) que (x_n) es una sucesión nula; por tanto,

$(e^{x_n}) = (\sqrt[n]{n})$ converge a 1 (Proposición 8.7).

ALGUNOS RESULTADOS Y EJEMPLOS SOBRE SUCESIONES QUE DIVERGEN A ∞ O − ∞

PROPOSICION 8.8 Sea (x_n) una sucesión de términos distintos de cero. $(|x_n|)$ diverge a ∞ si, y sólo si, $(1/x_n)$ es una sucesión nula.

Demostración

Se basa en que $|x_n| > M$ para $n \geqslant N$ si, y sólo si, $1/|x_n| < \varepsilon$ para $n \geqslant N$, donde $M > 0$ y $\varepsilon = 1/M$.

PROPOSICION 8.9 Si $\lim x_n = c \neq 0$ y $\lim y_n = \infty$, entonces,

$$\lim x_n y_n = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad c > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad c < 0 \end{cases}$$

Demostración

Supóngase que $c > 0$. Dado $M > 0$, se toma $\varepsilon < c$ y $M' = \dfrac{M}{c - \varepsilon}$.

Existe un número natural N tal que

$$x_n > c - \varepsilon \quad \text{e} \quad y_n > M' \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

Por tanto,

$$x_n y_n > M \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

La segunda parte de la proposición se demuestra en forma similar.

EJEMPLOS DE SUCESIONES QUE DIVERGEN A ∞

(a) $(|x|^n)$ si $|x| > 1$.

(b) $\left(\dfrac{1}{|x|^n}\right)$ si $|x| > 1$.

(c) $\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)$.

(d) (n^r), donde r es un racional positivo.

(e) $\left(\dfrac{n}{\log n}\right)$.

Todos estos resultados se siguen de la proposición 8.8 y lo demostrado en la sección sobre *límites importantes.*

(Cuando $x_n \to -\infty$ puede enunciarse un teorema análogo.)

TEOREMA 8.4 Sea $f: (a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Si (x_n) es una sucesión de puntos en (a, ∞) que diverge a ∞, entonces $\lim f(x_n) = \alpha$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $M > 0$ tal que $x > M$ y $x \in (a, \infty)$ implica que $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

Por otra parte, existe N natural tal que $x_n > M$ si $n \geqslant N$. De donde

$$|f(x_n) - \alpha| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

(Cuando $x_n \to -\infty$ puede enunciarse un teorema análogo.)

A partir de este teorema y lo visto en el capítulo 7, se tienen los resultados siguientes:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{n^2}} = 0.$

(c) $\lim_{n\to\infty}$ ang tan $x^n = \frac{\pi}{2}$ si $x > 1$.

ALGUNOS CRITERIOS SOBRE LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

1. Supóngase que $\lim y_n = \infty$ y sea (x_n) una sucesión. Entonces,

$$\lim x_n = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad x_n \geqslant ky_n \quad \text{para } n \geqslant n_0 \text{ y algún } k > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad x_n \leqslant -ky_n \quad \text{para } n \geqslant n_0 \text{ y algún } k > 0 \end{cases}$$

La demostración queda como ejercicio.

2. Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones definidas por

$$x_n = a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_0,$$
$$y_n = b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_0,$$

donde p y q son enteros no negativos, $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para $n \geqslant 1$.

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \dfrac{a_p}{b_q} & \text{si} \quad p = q \\ 0 & \text{si} \quad p < q \\ \infty & \text{si} \quad p > q \text{ y } \dfrac{a_p}{b_q} > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad p > q \text{ y } \dfrac{a_p}{b_q} < 0 \end{cases}$$

(a) Supóngase que $p = q$.

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^p}x_n}{\frac{1}{n^p}y_n} = \lim \frac{a_p + \frac{a_{p-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^p}}{b_q + \frac{b_{q-1}}{n} + \cdots + \frac{b_0}{n^p}}$$

Por tanto,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_p}{b_q}$$

(b) Supóngase que $p < q$.
Sea $x'_n = n^q + x_n$ para $n \geqslant 1$,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x'_n}{y_n} - \frac{n^q}{y_n}$$

Por el inciso anterior,

$$\lim \frac{x'_n}{y_n} = \frac{1}{b_q}$$

Por consiguiente,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$$

(c) Ahora, supóngase que $p > q$. Sea $r = p - q$. Así, $r > 0$ y

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim n^r \frac{a_p + \dfrac{a_{p-1}}{n} + \cdots + \dfrac{a_0}{n^p}}{b_q + \dfrac{b_{q-1}}{n} + \cdots + \dfrac{b_0}{n^q}}$$

$\lim n^r = \infty$, en tanto que el límite del cociente es igual a a_p/b_q.
Las dos últimas afirmaciones se siguen, entonces, de la proposición 8.9.

EJEMPLOS

1. $\displaystyle \lim \frac{3n^7 - n^4 + 5n - 1}{2n^7 + n^6 - n^5 + 3n^4 + 6} = \frac{3}{2}.$
2. $\displaystyle \lim \frac{60n^3 + n^2 - 20n + 1}{n^4 + 1} = 0.$
3. $\displaystyle \lim \frac{n^4 + 1}{n^3 - 2} = \infty.$

3. Sea (x_n) una sucesión de términos positivos. Supóngase que $\displaystyle \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha$.

(a) Si $\alpha < 1$, entonces (x_n) es una sucesión nula.
(b) Si $\alpha > 1$, entonces (x_n) diverge a ∞.
(c) Si $\alpha = 1$, este criterio no da información sobre la convergencia de la sucesión (x_n).

Demostración (a) Existe un número real b tal que $0 \leqslant \alpha < b < 1$. Sea $\varepsilon = b - \alpha$. Como $\displaystyle \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha$, existe un número natural N tal que

$$\alpha - b < \frac{x_{n+1}}{x_n} - \alpha < b - \alpha \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

En particular,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < b \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

Así,

$$0 < x_{N+1} < bx_N$$
$$0 < x_{N+2} < bx_{N+1} < b^2 x_N$$
$$0 < x_{N+3} < bx_{N+2} < b^3 x_N$$
$$\vdots$$

En general,

$$0 < x_n < cb^n \quad \text{para} \quad n \geqslant N,$$

donde

$$c = \frac{x_N}{b^N}$$

Por ser $|b| < 1$, se infiere que $\text{lím}\, cb^n = 0$ y, por tanto,

$$\text{lím}\, x_n = 0$$

(b) Sea $y_n = 1/x_n$ para $n \geqslant 1$.

$$\text{lím}\, \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{\alpha} < 1$$

El primer inciso muestra que $\text{lím}\, y_n = 0$. De la proposición 8.8 se sigue entonces nuestra afirmación.

(c) Sea $(x_n) = (n)$ e $(y_n) = (1/n)$.

$$\text{lím}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \text{lím}\, \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$$

y (x_n) diverge, en tanto que (y_n) converge.

Así, la condición $\alpha = 1$ no implica la convergencia ni la divergencia de la sucesión (x_n).

EJEMPLOS

1. $\left(\frac{n}{(1+x)^n}\right)$ es nula si $x > 0$.
2. $\left(\frac{2^n}{n}\right)$ diverge a ∞.

4. Sea (x_n) una sucesión creciente. (x_n) converge si, y sólo si, está acotada superiormente. Más aún, en este caso,

$$\text{lím}\, x_n = \sup\{x_n \mid n \geqslant 1\}$$

Demostración Supóngase que (x_n) converge. Se tiene entonces que es una sucesión acotada (Teorema 8.1) y, en especial, acotada superiormente.

A la inversa, supóngase que (x_n) está acotada superiormente. En este caso, existe el supremo del conjunto $S = \{x_n \mid n \geqslant 1\}$; que se denotará por α.

Sea $\varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior del conjunto S. (Recuérdese: el supremo es la mínima cota superior del conjunto.) Por tanto, existe un término x_N tal que

$$\alpha - \varepsilon < x_N$$

Como la sucesión (x_n) es creciente, se tiene

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leqslant \alpha \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

De donde

$$|x_n - \alpha| = \alpha - x_n < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

Queda así demostrado que

$$\text{lím}\, x_n = \alpha$$

El criterio siguiente puede probarse en forma análoga.

5. Una sucesión (x_n) decreciente converge si, y sólo si, está acotada inferiormente. En este caso,

$$\text{lím}\, x_n = \inf\{x_n \mid n \geqslant 1\}$$

6. Sea (x_n) una sucesión monótona,

$$\text{lím}\, x_n = \begin{cases} \infty & \text{si } (x_n) \text{ es creciente y no acotada superiormente.} \\ -\infty & \text{si } (x_n) \text{ es decreciente y no acotada inferiormente.} \end{cases}$$

Aunque los criterios 4 y 5 sólo nos garantizan la existencia del límite, en ocasiones es posible determinar éste como se ilustra en los ejemplos siguientes:

1. Sea $x_1 = 1$ y $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$ si $n \geqslant 2$.

Mediante inducción puede probarse con facilidad que (x_n) es creciente y está acotada superiormente, por 2. Así, el límite de (x_n) y cualquiera de sus sucesiones existe y es el mismo real α.

En particular, $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen a α y, dado que

$$x_n = (1 + x_{n-1})^{1/2} \quad \text{si} \quad n \geqslant 2,$$

se tiene que $\alpha = (1 + \alpha)^{1/2}$.

Así,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

pero $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ no puede ser el límite, pues la sucesión es de términos positivos. De donde

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

2. Sean $x_1 = 2$ y $x_n = \sqrt{2x_{n-1} - 1}$ si $n \geqslant 2$.

De nuevo, por inducción, es fácil demostrar que (x_n) es decreciente y está acotada inferiormente por 1. Al proceder como antes, se concluye que el límite α debe satisfacer la ecuación $\alpha = \sqrt{2\alpha - 1}$. Por tanto, $\alpha = 1$.

En la sección siguiente se describe un criterio importante para la convergencia de sucesiones.

SUCESIONES DE CAUCHY

Supóngase que (x_n) es una sucesión que converge a un número real α. Es decir, los elementos x_n se aproximan a x_0 cuando n es grande. Así, los términos de la sucesión se encuentran próximos entre sí cuando tienen índices grandes.

Cuando los términos de una sucesión se comportan como se describe en la parte segunda del párrafo anterior, se dice que la sucesión es de Cauchy.

Formalmente se tiene la definición siguiente:

DEFINICION 8.13 *Sea* (x_n) *una sucesión. Se dice que* (x_n) *es de* Cauchy *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* N *tal que*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geqslant N$$

EJEMPLOS

Las sucesiones siguientes son de Cauchy:

1. $\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. $\left(\frac{1}{n!}\right)$.
3. $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$.

En tanto que éstas no lo son:
4. $(\log n)$.
5. $((-1)^n)$.
6. $(\tan n)$.

Prueba de 1, 2 y 3.
Sea $\varepsilon > 0$. Existe un número natural N tal que $N > 2/\varepsilon$. Si $n, m \geqslant N$, entonces:

1. $$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \leqslant \frac{2}{N} < \varepsilon.$$
2. $$\left|\frac{1}{n!} - \frac{1}{m!}\right| \leqslant \left|\frac{1}{n!}\right| + \left|\frac{1}{m!}\right| \leqslant \frac{2}{N} < \varepsilon.$$
3. $$\left|\frac{2n}{n+1} - \frac{2m}{m+1}\right| \leqslant \frac{2|n-m|}{|(n+1)(m+1)|} \leqslant \frac{2r}{(n+1)(m+1)} < \frac{2}{N} < \varepsilon,$$
   donde $r = \begin{cases} n & \text{si} \quad n \geqslant m \\ m & \text{si} \quad m \geqslant n. \end{cases}$

Prueba de 4, 5 y 6.
Sea $\varepsilon = 1$ y N un número natural. Entonces,
4. $|\log 3N - \log N| = \log 3 > 1$.
5. $|(-1)^{2N} - (-1)^{2N+1}| = 2 > 1$.
6. Sea $n \geqslant N$ y tal que entre n y $n + 1$ no existe ningún número real de la forma $(2p + 1)\pi/2$ con $p \in \mathbb{Z}$.
   $|\tan n - \tan(n + 1)| = |\sec x|$, por el teorema del valor medio, para algún $x \in (n, n + 1)$. Así, $|\tan n - \tan(n + 1)| \geqslant 1$.

PROPOSICION 8.10 Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración
Existe un número natural N tal que

$$|x_n - x_m| < 1 \quad \text{si} \quad n, m \geqslant N$$

En particular,

$$|x_n - x_N| < 1 \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Por tanto,

$$|x_n| < 1 + |x_N| \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Si K es un número mayor que $|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|$ y $1 + |x_N|$, entonces $|x_n| \leqslant K$ para todo n.

PROPOSICION 8.11 Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Si (y_k) es una subsucesión de (x_n) e (y_k) converge a α, entonces (x_n) converge a α.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Existen dos números naturales N_1 y K tales que

$$|y_k - \alpha| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad k \geqslant K$$

y también,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad n, m \geqslant N_1$$

Sea N un número natural más grande que N_1 y K. Para todo n, se tiene que

$$|x_n - \alpha| \leqslant |x_n - y_N| + |y_N - \alpha| < |x_n - y_N| + \varepsilon/2,$$

y como

$$y_N = x_{n_N} \quad \text{con} \quad n_N \geqslant N,$$

concluimos que

$$|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

Como resultado principal de esta sección se tiene el teorema siguiente:

TEOREMA 8.5 **Una sucesión converge si, y sólo si, es de Cauchy.**

Una de las afirmaciones contenidas en el teorema fue la elegida para introducir el concepto de sucesión de Cauchy y será la que se probará primero.

Supóngase que la sucesión (x_n) converge al número real α. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un número natural N tal que $|x_n - \alpha| < \varepsilon/2$ si $n \geqslant N$.

Si $n, m \geqslant N$, entonces

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - \alpha| + |x_m - \alpha| < \varepsilon$$

Por tanto, (x_n) es de Cauchy.

Para concluir la demostración del teorema, bastará, de acuerdo a la proposición 8.11, que se pruebe la proposición siguiente:

PROPOSICION 8.12 **Si (x_n) es de Cauchy, entonces (x_n) tiene una subsucesión convergente.**

Para ello se acepta, sin demostración, que *toda sucesión tiene una subsucesión creciente o una decreciente.* A partir de esta propiedad y los criterios 4 y 5 enunciados en la sección anterior, se infiere el teorema siguiente:

TEOREMA 8.6 **Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.**

La proposición 8.12 es consecuencia inmediata de la proposición 8.10 y del teorema anterior.

DEMOSTRACION DE DOS TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS

En esta sección se demostrarán el teorema del valor intermedio, estudiado en el capítulo 3 sobre continuidad, y uno de los teoremas centrales referido a cómo dibujar gráficas. Con este objeto se establecen las proposiciones siguientes:

PROPOSICION 8.13 Sea (z_n) una sucesión que converge al número real α. Si $z_n \leqslant c$ para todo $n \geqslant 1$, entonces $\alpha \leqslant c$.

Demostración
Supóngase que $\alpha > c$; entonces,

$$\frac{\alpha + c}{2} > c$$

Sea $\varepsilon = (\alpha - c)/2$. Como $\lim z_n = \alpha$, se sigue que existe N natural tal que $|z_n - \alpha| < \varepsilon$ si $n \geqslant N$. En particular, $|\alpha - z_N| < \varepsilon$. Así,

$$-\varepsilon < \alpha - z_N < \varepsilon$$

De donde

$$c < \frac{\alpha + c}{2} = \alpha - \frac{\alpha - c}{2} < z_N;$$

lo cual contradice la hipótesis: $z_n \leqslant c$ para todo $n \geqslant 1$.

PROPOSICION 8.14 Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado. Si (x_n) es una sucesión de puntos en $[a, b]$, entonces (x_n) tiene una subsucesión que converge a un punto de $[a, b]$.

Demostración
(x_n) tiene una subsucesión monótona (y_k) de acuerdo a lo señalado después de la proposición 8.12. Como cada y_k pertenece a $[a, b]$, la sucesión (y_k) es acotada y tiene por cotas superior e inferior a a y a b, respectivamente. Por tanto, $\lim y_k = \alpha$, donde $a \leqslant \alpha \leqslant b$.

PROPOSICION 8.15 Si α es el supremo o el ínfimo de un subconjunto A de $\mathbb{R}$, entonces existe una sucesión (x_n) de puntos en A, que converge a α.

Demostración
Supóngase que $\alpha = \sup A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha - 1/n < \alpha$. Por las propiedades características del supremo, expresadas ya en el capítulo sobre números reales, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A$ tal que $\alpha - 1/n < x_n \leqslant \alpha$. Por tanto, la sucesión (x_n) converge a α por la proposición 8.4.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(a) < c < f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = c$.

Demostración

Sean $\varepsilon_1 = c - f(a)$ y $\varepsilon_2 = f(b) - c$. Por la continuidad de f, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1 \quad \text{si} \quad |x - a| < \delta_1 \text{ y } x \in [a,b]$$

y también,

$$|f(x) - f(b)| < \varepsilon_2 \quad \text{si} \quad |x - b| < \delta_2 \text{ y } x \in [a,b]$$

De donde

$$f(x) < f(a) + c - f(a) \quad \text{si} \quad |x - a| < \delta_1 \text{ y } x \in [a,b]$$

y

$$f(b) - (f(b) - c) < f(x) \quad \text{si} \quad |x - b| < \delta_2 \text{ y } x \in [a,b]$$

Es decir,

$$f(x) < c \quad \text{si} \quad x \in [a, a + \delta_1)$$

y también,

$$f(x) > c \quad \text{si} \quad x \in (b - \delta_2, b]$$

Considérese el conjunto $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) < c\}$.

Es obvio que $a \in A$ y A está acotado superiormente por b. Más aún, por lo anterior, $a + \delta_1/2 \in A$ y $b - \delta_2/2$ es una cota superior de A. Por consiguiente, si $x_0 = \sup A$, entonces $a < x_0 < b$.

De la definición de x_0, se sigue que si $y \in (x_0, b)$, entonces $f(y) \geqslant c$.

En vista de la proposición anterior existe una sucesión (x_n) de puntos en A y otra (y_n) de puntos en (x_0, b) tales que $\lim x_n = \lim y_n = x_0$. Por la continuidad de f, se concluye que $\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(x_0)$. Por otra parte, a partir de que $f(x_n) < c < f(y_n)$ para todo $n \geqslant 1$, y al aplicar la proposición 8.13, se obtiene

$$f(x_0) \leqslant c \leqslant f(x_0)$$

Es decir, $f(x_0) = c$, donde $a < x_0 < b$.

En la sección «Cómo dibujar gráficas», se enunció el teorema siguiente: Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en este intervalo.

Para su demostración se utilizará el lema siguiente:

LEMA 8.1 Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua. $f([a,b])$ es un conjunto acotado.

Demostración

Supóngase que $f([a,b])$ no es acotado. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in [a,b]$ tal que $|f(x_n)| > n$.

Por la proposición 8.14, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) que converge a un punto α de $[a, b]$.

Así,

$$|f(x_{n_k})| \quad n_k > k \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{N}$$

y también,

$$\lim_{k \to \infty} |f(x_{n_k})| = |f(\alpha)|$$

Por tanto, $|f(\alpha)| > k$ para todo número natural k, lo cual es imposible, pues $f(\alpha) \in \mathbb{R}$.

Demostración del teorema

En vista del lema anterior, se tiene que $f([a, b])$ es acotado.

Sea $m = \inf f([a, b])$ y $M = \sup f([a, b])$. Por la proposición 8.15 existen dos sucesiones (y_n) y (x_n) de puntos en $[a, b]$ tales que

$$\lim f(y_n) = m \quad \text{y} \quad \lim f(x_n) = M$$

Por otra parte, por la proposición 8.14, (y_n) y (x_n) tienen subsucesiones (y_{n_k}) y (x_{n_k}) que convergen a puntos del intervalo $[a, b]$.

$\beta = \lim x_{n_k}$. Del teorema 8.3 se sigue que

$$f(\alpha) = \lim f(y_{n_k}) \quad \text{y} \quad f(\beta) = \lim f(x_{n_k})$$

Finalmente, como $(f(y_{n_k}))$ y $(f(x_{n_k}))$ son subsucesiones de $(f(y_n))$ y $(f(x_n))$, respectivamente, se concluye que

$$f(\alpha) = m \quad \text{y} \quad f(\beta) = M$$

Mediante este teorema y el teorema del valor intermedio, es posible probar la proposición siguiente:

PROPOSICION 8.16 Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\operatorname{im} f =$ $= [m, M]$, donde $m = \text{mín } f$ y $M = \text{máx } f$, respectivamente.

Demostración

Es claro que

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{para todo } x \text{ en } [a, b];$$

es decir,

$$\operatorname{im} f \subset [m, M]$$

Por otro lado, si $m < x < M$, entonces se infiere del teorema del valor intermedio que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = x,$$

por lo que

$$[m, M] \subset \operatorname{im} f$$

SERIES, DEFINICIONES Y NOTACIONES

Sea (x_m) una sucesión de números reales. A la suma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

la denotamos por

$$\sum_{m=1}^{n} x_m.$$

DEFINICION 8.14 *Dada una sucesión (x_m) de números reales, se define una sucesión (s_n) de la manera siguiente:*

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} x_m$$

La sucesión (s_n) así construida se denomina serie generada por la sucesión (x_m) y se denota por

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_m, \quad \text{o bien} \quad \sum x_m$$

Los elementos x_m se denominan términos de la serie *y los elementos s_n,* sumas parciales de la serie.

EJEMPLOS
Por

1. $\sum \frac{1}{m}$
2. $\sum m$
3. $\sum \frac{\log m}{m+1}$

se denota a las sucesiones cuyos primeros cuatro términos son, respectivamente:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{50}{24}$$

$$1, 3, 6, 10$$

$$\frac{\log 1}{2}, \frac{\log 1}{2} + \frac{\log 2}{3}, \frac{\log 1}{2} + \frac{\log 2}{3} + \frac{\log 3}{4}, \frac{\log 1}{2} + \frac{\log 2}{3} + \frac{\log 3}{4} + \frac{\log 4}{5}$$

Es decir, las series son sucesiones obtenidas a partir de otras, a través del procedimiento indicado antes. La nueva notación $\sum x_m$ para ellas se introduce para recordar dicho procedimiento.

Dada una sucesión (x_n) es posible encontrar una serie $\sum y_m$ tal que su n-ésima suma parcial coincida con el n-ésimo término de la sucesión. En efecto, definase

$$y_1 = x_1 \quad \text{e} \quad y_m = x_m - x_{m-1} \quad \text{para} \quad m \geqslant 2$$

En este caso,

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} y_m = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n$$

OPERACIONES CON SERIES

Sean $\sum x_m$ y $\sum y_m$ dos series y c un número real. Con $\sum x_m$ y $\sum y_m$ se representan las sucesiones de sumas parciales (s_n) y (t_n), respectivamente. Al aplicar las reglas para sumar sucesiones y multiplicarlas por un número real, se obtiene:

$$\sum x_m + \sum y_m = \sum (x_m + y_m)$$

$$c \sum x_m = \sum c x_m,$$

o sea, $\sum x_m + \sum y_m$ es igual a la serie generada por la sucesión

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots),$$

en tanto que $c \sum x_m$ es igual a la serie generada por

$$(cx_1, cx_2, cx_3, \ldots)$$

Para nuestros propósitos, bastará contar con estas dos operaciones.

SUBSERIES Y REARREGLOS DE UNA SERIE

Subseries

La definición de *subserie* que aquí se da difiere de la que resultaría de aplicar la definición de subsucesión a la sucesión de sumas parciales de la serie que, en cierto modo, sería lo más natural. Sin embargo, la que se presenta resulta más útil y recuerda el proceso indicado para obtener una subsucesión.

DEFINICION 8.15 *Sea* (y_k) *una subsucesión de* (x_n); *la serie* $\sum y_k$ *generada por* (y_k) *se llama* una subserie de $\sum x_n$. *Es decir, una subserie se obtiene al suprimir en la serie un número finito o infinito de términos, con la condición de que el número de elementos no suprimidos sea infinito.*

EJEMPLOS

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es una subserie de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ya que $\left(\frac{1}{k^2}\right)$ es una subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \log(8 + k)$ es una subserie de $\sum_{n=1}^{\infty} \log n$, ya que $(\log(k + 8))$ es una subsucesión de $(\log n)$.

En este último ejemplo, donde la subserie se obtiene al suprimir los primeros ocho términos de la serie, se ha convenido, igual que para las sucesiones, en denotar a la subserie por

$$\sum_{m=9}^{\infty} \log m$$

En general, la serie generada por la subsucesión $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ se denota por

$$\sum_{m=n_0}^{\infty} x_m$$

Rearreglos

Sea (m_n) una sucesión de números naturales en la que cada número natural aparece una y sólo una vez. Se dice que (m_n) es un rearreglo de la sucesión (n). Por ejemplo:

$$(2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots) \text{ es un rearreglo de } (n)$$

A diferencia de las subsucesiones para obtener un rearreglo, sí podemos cambiar el orden de los elementos en la sucesión, pero *no* podemos suprimir ninguno. Esta idea puede generalizarse para cualquier sucesión.

DEFINICION 8.16 *Sea* (x_n) *una sucesión y* (m_n) *un rearreglo de* (n). *Si* $(y_n) = (x_{m_n})$, *se dice, entonces, que* (y_n) *es un rearreglo de* (x_n). *Por ejemplo,*

$$(x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \ldots) \textit{ es un rearreglo de } (x_n)$$

Nótese que si (y_n) es un rearreglo de (x_n), entonces (x_n) es un rearreglo de (y_n).

DEFINICION 8.17 *Sea* (y_n) *un rearreglo de* (x_n). *La serie* $\sum y_n$ *es llamada* un rearreglo de $\sum x_n$.

Aquí también se observa que si $\sum y_n$ es un rearreglo de la serie $\sum x_n$, entonces esta serie es un rearreglo de la primera.

CONVERGENCIA DE SERIES

Series convergentes

Resulta natural decir que $\sum x_m$ converge a α si la sucesión de sus sumas parciales tiene por límite a α. Es decir:

DEFINICION 8.18 *Una serie $\sum x_m$ converge a un real α si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que*

$$\left|\sum_{m=1}^{n} x_m - \alpha\right| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

En este caso se escribe $\sum x_m = \alpha$, y se dice que $\sum x_m$ es una serie convergente que tiene por límite a α, o bien que la suma de la $\sum x_m$ es α.

Series divergentes

Toda serie que no es convergente se llama *divergente*. Entre éstas se encuentran las que divergen a ∞ ó $-\infty$.

DEFINICION 8.19 *$\sum x_m$ diverge a ∞ si para cada número real $M > 0$ existe un número natural N tal que*

$$\sum_{m=1}^{n} x_m > M \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

En este caso se escribe $\sum x_m = \infty$.

DEFINICION 8.20 *$\sum x_m$ diverge a $-\infty$ si para cada número real $M > 0$ existe un número natural N tal que*

$$\sum_{m=1}^{n} x_m < -M \quad \text{para} \quad n \geqslant N$$

En este caso se escribe $\sum x_m = -\infty$.

EJEMPLOS

1. $\sum x^{m-1} = \dfrac{1}{1-x}$ si $0 < x < 1$.
2. $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente y su límite es positivo.
3. $\sum x^{m-1} = \infty$ si $x \geqslant 1$.
4. $\sum \dfrac{1}{n} = \infty$.

Demostración 1. Sea s_n la n-ésima suma parcial de la serie. Así,

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

y también,

$$xs_n = x + x^2 + \cdots + x^n$$

De donde,

$$(1-x)s_n = 1 - x^n, \quad \text{es decir,} \quad s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Por tanto,

$$\text{lím}\, s_n = \frac{1}{1-x},$$

ya que $\text{lím}\, x^n = 0$, por ser $|x| < 1$.

2. Se probará más adelante.
3. Sea s_n la n-ésima suma parcial de la serie.

$$s_n \geqslant n \quad \text{para} \quad n \geqslant 1$$

Como (n) diverge a ∞, se sigue, del primer criterio para la convergencia o divergencia de sucesiones, que

$$\sum x^{m-1} = \infty$$

4. Sea s_n la n-ésima suma parcial de la serie. Para $n \geqslant 1$ se tiene

$$a_n < \frac{1}{n},$$

donde a_n es el área de Δ_n (Fig. 8.6).

Por otra parte,

$$a_n = \log(n+1) - \log n$$

De donde

$$(\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \cdots + (\log(n+1) - \log n) < 1 + 1/2 + \cdots + 1/n = s_n,$$

o sea,

$$\log(n+1) < s_n \quad \text{para} \quad n \geqslant 1$$

Pero $\text{lím} \log(n+1) = \infty$. Por consiguiente,

$$\sum \frac{1}{n} = \infty$$

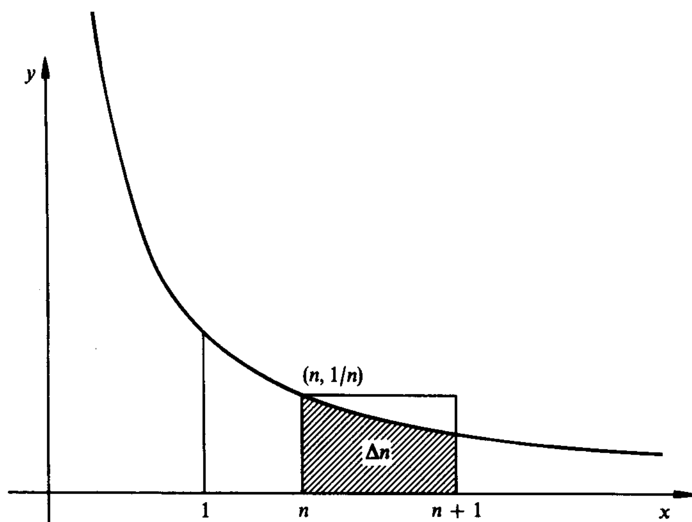


Figura 8.6

ALGUNOS RESULTADOS RELATIVOS A LAS SERIES CONVERGENTES

La proposición siguiente es consecuencia inmediata del teorema 8.1.

PROPOSICION 8.17 Si una serie converge, entonces la sucesión de sus sumas parciales es acotada.

TEOREMA 8.7 Si $\sum x_m$ es convergente, entonces la sucesión de sus términos es nula.

Demostración

Para $n \geqslant 1$ sea s_n la n-ésima suma parcial de $\sum x_n$

$$x_n = s_n - s_{n-1} \qquad \text{para} \qquad n \geqslant 2$$

Por tanto,

$$\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, s_n - \text{lím}\, s_{n-1} = 0$$

El inverso del teorema no es válido, como puede observarse en el ejemplo 4 de la sección anterior.

TEOREMA 8.8 Si $\sum x_m = \alpha$, $\sum y_m = \beta$ y c es número real, entonces,
1) $\sum x_m + \sum y_n = \alpha + \beta$.
2) $c\sum x_m = c\alpha$.

La demostración se sigue del teorema 8.2.

PROPOSICION 8.18 $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ converge si, y sólo si, para algún $n_0 \geqslant 1$ la subserie $\sum_{m=n_0}^{\infty} x_m$ converge. Más aún, en cualquiera de los dos casos se tiene

$$\alpha = \sum_{n=1}^{n_0-1} x_n + \beta$$

Donde α y β son los límites de $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ y $\sum_{m=n_0}^{\infty} x_m$, respectivamente.

Demostración

Sean (s_n) y (t_n) las sucesiones de sumas parciales de $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ y $\sum_{m=n_0}^{\infty} x_m$, respectivamente. Es claro que

$$s_{n+n_0} = \sum_{m=1}^{n_0-1} x_m + t_{n+1} \qquad \text{para} \qquad n \geqslant 1$$

Por tanto, (s_n) converge si, y sólo si, (t_n) converge.

ALGUNOS RESULTADOS RELATIVOS A LAS SERIES DE TERMINOS NO NEGATIVOS

En esta sección, $\sum x_m$ denotará una serie de términos no negativos. Sea (s_n) la sucesión de sumas parciales de $\sum x_m$. Dicha sucesión es creciente, ya que

$$s_{n+1} = s_n + x_{n+1} \qquad \text{y} \qquad x_n \geqslant 0 \qquad \text{para} \qquad n \geqslant 1$$

A partir del criterio 4 para la convergencia de sucesiones se tiene la proposición siguiente:

PROPOSICION 8.19 $\sum x_m$ converge si, y sólo si, la sucesión de sus sumas parciales está acotada superiormente. Y, en este caso, el límite de la serie es igual a

$$\sup\left\{\sum_{m=1}^{n} x_m \mid n \geqslant 1\right\}$$

En especial, si $\sum x_m = \alpha$, entonces $\sum_{m=1}^{n} x_m \leqslant \alpha$ para $n \geqslant 1$.

PROPOSICION 8.20 Sea $\sum y_m$ un rearreglo de $\sum x_n$. Si $\sum x_n = \alpha$, entonces $\sum y_m = \alpha$.

Demostración

Supóngase $\sum x_m = \alpha$, y sea n un número natural. Elíjase un natural N tal que cada uno de los elementos $y_1, y_2, ..., y_n$ coincida con alguno de los elementos $x_1, x_2, ..., x_N$. Se tiene, entonces,

$$\sum_{m=1}^{n} y_m \leqslant \sum_{m=1}^{N} x_m \leqslant \alpha,$$

por lo que la sucesión de sumas parciales de $\sum y_m$ está acotada superiormente y α es una de sus cotas superiores. Por tanto, $\sum y_m$ converge, y si β es su límite, entonces $\beta \leqslant \alpha$. Pero, como $\sum x_m$ es también un rearreglo de $\sum y_m$, se sigue de la misma manera que $\alpha \leqslant \beta$; de donde $\alpha = \beta$.

TEOREMA 8.9 $\sum x_m$ converge si, y sólo si, todas sus subseries convergen.

La demostración se hace de manera semejante a la de la proposición anterior.

SERIES ALTERNANTES

DEFINICION 8.21 *Una serie de la forma*

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} x_m,$$

donde cada $x_m > 0$, *se dice que es una serie alternante.*

EJEMPLOS

1. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$
2. $\sum (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2} = 2 - \frac{4}{4} + \frac{8}{9} - \frac{16}{10} + \cdots$

TEOREMA 8.10 (Criterio de Leibniz) Sea $\sum(-1)^{n+1}x_n$ una serie alternante. Si (x_n) es una sucesión estrictamente decreciente que converge a cero, entonces $\sum(-1)^{n+1}x_n$ es convergente y su límite es positivo.

Demostración

Sea (s_n) la sucesión de las sumas parciales de la serie. Por la proposición 8.6, para demostrar que (s_n) converge, basta probar que las subsucesiones

$$(s_{2n}) \quad \text{y} \quad (s_{2n-1})$$

convergen y tienen el mismo límite.

$$\begin{aligned} s_{2n} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = \\ &= (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \cdots + (x_{2n-1} - x_{2n}) \end{aligned}$$

Dado que la sucesión es estrictamente decreciente, cada uno de los números en los paréntesis es positivo. Así,

$$s_{2n} > 0 \quad \text{para} \quad n \geqslant 1$$

Por otra parte,

$$s_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - \cdots - (x_{2n-2} - x_{2n-1}) - x_{2n}$$

En este caso, cada uno de los números en los paréntesis es positivo, al igual que x_{2n}. Se tiene, entonces, que

$$s_{2n} < x_1 \quad \text{para} \quad n \geqslant 1$$

Además, es claro que

$$s_{2(n+1)} > s_{2n}$$

Es decir, (s_{2n}) es una sucesión creciente acotada superiormente; por tanto, es convergente. Y como los términos de la sucesión son positivos, se tiene

$$\text{lím}\, s_{2n} = \alpha > 0$$

Por último,

$$s_{2n-1} = s_{2n} - x_{2n} \quad \text{para} \quad n \geqslant 1$$

Puesto que $\text{lím}\, x_{2n} = 0$, se concluye que

$$\text{lím}\, s_{2n-1} = \alpha$$

De donde $\sum(-1)^{m+1}x_m = \alpha$.

De este teorema resulta, como se había anticipado, que la serie

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es convergente y su límite es positivo.

SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

DEFINICION 8.22 *Una serie* $\sum x_n$ *es absolutamente convergente si* $\sum |x_n|$ *es convergente.*

A partir de los resultados sobre las series de términos no negativos, se tienen las proposiciones siguientes:

PROPOSICION 8.21 Una serie es absolutamente convergente si, y sólo si, cada rearreglo es absolutamente convergente.

PROPOSICION 8.22 Una serie es absolutamente convergente si, y sólo si, cada una de sus subseries es absolutamente convergente.

TEOREMA 8.11 Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.

El inverso del teorema no es válido, como puede verse de los ejemplos 2 y 4 de la página 293.

Demostración

Sea $\sum x_n$ una serie absolutamente convergente. Denótese por (s_n) y (t_n) las sucesiones de sumas parciales de $\sum x_n$ y $\sum |x_n|$, respectivamente. Para demostrar que converge, basta probar que (s_n) es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$. La sucesión (t_n) es de Cauchy, pues es convergente. Por tanto, existe un número natural N tal que

$$|t_n - t_m| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geqslant N$$

Sean $n, m > N$. Supóngase que $n > m$, entonces

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=m+1}^{n} |x_i| = t_n - t_m$$

Si $m > n$, entonces

$$|s_n - s_m| \leqslant t_m - t_n$$

Así,

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geqslant N$$

CRITERIOS SOBRE LA CONVERGENCIA DE LAS SERIES

1. *Criterio de comparación*
   (a) De primera especie.

1) Si $\sum x_m$ converge e $|y_m| \leqslant x_m$ para $m \geqslant n_0$, entonces $\sum y_m$ es absolutamente convergente.
2) Si $\sum x_m$ diverge e $y_m \geqslant |x_m|$ para $m \geqslant n_0$, entonces $\sum y_m$ diverge a ∞.

(b) De la segunda especie.

Sea $\sum x_m$ una serie de términos positivos.

3) Si $\sum x_m$ converge e $|y_m|/x_m \leqslant M$ para $m \geqslant n_0$ y alguna $M > 0$, entonces $\sum y_m$ es absolutamente convergente.
4) Si $\sum x_m$ diverge e $y_m/x_m \geqslant M$ para $m \geqslant n_0$ y alguna $M > 0$, entonces $\sum y_m$ diverge.

Demostración

1) Existe $K > 0$ tal que $\sum_{m=n_0}^{n} x_m \leqslant K$ para $n \geqslant n_0$. Por tanto,

$$\sum_{m=1}^{n} |y_m| \leqslant \sum_{m=1}^{n_0-1} |y_m| + K \quad \text{para} \quad n \geqslant 1$$

La afirmación se sigue entonces de la proposición 8.19.

2) La demostración se sigue de 1), la proposición 8.19 y el criterio 6 para sucesiones.

Las demostraciones de 3) y 4) se siguen de la parte (a).

A partir de este criterio, se obtiene el siguiente:

2. *Sea $\sum x_m$ una serie de términos positivos y $\sum y_m$ una de términos distintos de cero:*

1) Si $\sum x_m$ converge y $|y_{m+1}|/|y_m| \leqslant x_{m+1}/x_m$ para $m \geqslant n_0$, entonces $\sum y_m$ es absolutamente convergente.
2) Si $\sum x_m$ diverge e $y_{m+1}/y_m \geqslant x_{m+1}/x_m$ para $m \geqslant n_0$, entonces $\sum y_m$ diverge a $\pm\infty$.

Demostración

1) Por hipótesis se tiene:

$$\frac{|y_{n_0+1}|}{|y_{n_0}|} \leqslant \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}$$

$$\frac{|y_{n_0+2}|}{|y_{n_0+1}|} \leqslant \frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\frac{|y_n|}{|y_{n-1}|} \leqslant \frac{x_n}{x_{n-1}} \qquad \text{con } n \geqslant n_0$$

Al multiplicar miembro a miembro, se obtiene:

$$\frac{|y_n|}{|y_{n_0}|} \leqslant \frac{x_n}{x_{n_0}}$$

Es decir,

$$\frac{|y_n|}{x_n} \leqslant M \quad \text{para} \quad n \geqslant n_0,$$

donde $M = |y_{n_0}|/x_{n_0}$, y la afirmación se sigue del criterio de comparación de segunda especie.

La afirmación del inciso 2) se sigue del 1), la proposición 8.19 y el criterio 6 para sucesiones.

3. *Criterio de la razón o de D'Alembert:*
Sea $\sum x_m$ una serie de términos distintos de cero. Supóngase que $\lim |x_{m+1}|/|x_m| = \alpha$.
1) Si $\alpha < 1$, entonces $\sum x_m$ es absolutamente convergente.
2) Si $\alpha > 1$, entonces $\sum x_m$ es divergente.

Demostración

1) Al seguir la demostración del criterio 3 para la convergencia de sucesiones, se tiene que existe un real $0 < b < 1$ tal que

$$|x_n| \leqslant \frac{x_N}{b^N} b^n \quad \text{para} \quad n > N$$

Como $0 < b < 1$, $\sum b^n$ converge, por lo que el criterio de comparación de la segunda especie dice que $\sum x_n$ es absolutamente convergente.

2) En este caso, el criterio 3 para la convergencia de sucesiones dice que $(|x_n|)$ diverge a ∞. Por tanto, la afirmación se sigue del teorema 8.7.

El criterio anterior no da información cuando $\alpha = 1$. Por ejemplo, para las series $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, se tiene $\alpha = 1$ y, mientras la primera diverge, la segunda converge.

4. *Criterio de la raíz o de Cauchy*
Sea $\sum x_m$ una serie y supóngase que $\lim \sqrt[m]{|x_m|} = \alpha$.
1) Si $\alpha < 1$, entonces $\sum x_m$ es absolutamente convergente.
2) Si $\alpha > 1$, entonces $\sum x_m$ diverge.

Demostración

1) En forma similar a como se procedió en el tercero de los criterios para sucesiones, puede probarse que existe un número real $0 \leqslant \alpha < b < 1$ y uno natural N tales que

$$\sqrt[m]{|x_m|} < b \quad \text{para} \quad m \geqslant N$$

Por tanto,

$$|x_m| < b^m \quad \text{para} \quad m \geqslant N$$

Como $\sum b^m$ es convergente, se sigue del criterio de comparación de primera especie que $\sum x_m$ es absolutamente convergente.

2) En forma análoga puede probarse que existen un número real $a > 1$ y un natural N tales que

$$a < \sqrt[m]{|x_m|} \quad \text{para} \quad m \geqslant N$$

Por tanto,

$$1 < |x_m| \quad \text{para} \quad m \geqslant N$$

y la sucesión (x_m) no es nula. Así, $\sum x_m$ diverge.

5. *Criterio de Raabe*
Sea $\sum x_m$ una serie de términos distintos de cero. Supóngase que

$$\text{lím}\, m\left(1 - \frac{|x_{m+1}|}{|x_m|}\right) = \alpha$$

1) Si $\alpha > 1$, entonces la serie $\sum x_m$ es absolutamente convergente.
2) Si $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum |x_m|$ es divergente.

Demostración

1) Sean a y b dos números reales tales que $1 < a < \alpha < b$. Existe un número natural N tal que

$$a < m\left(1 - \frac{|x_{m+1}|}{|x_m|}\right) < b \quad \text{para} \quad m \geqslant N$$

De donde

$$m|x_{m+1}| < m|x_m| - a|x_m| = (m-1)|x_m| - (a-1)|x_m| \text{ para } m \geqslant N$$

Como $0 < a - 1$, se tiene

$$m|x_{m+1}| \leqslant (m-1)|x_m| \quad \text{para} \quad m \geqslant N$$

Es decir, la sucesión $((m-1)|x_m|)_{m=N+1}^{\infty}$ es decreciente y, debido a que está acotada inferiormente (sus términos son positivos), es una sucesión convergente. Y así también lo es $((m-1)|x_m|)_{m=1}^{\infty}$ (Ejercicio 8.7). La sucesión (z_n) se define mediante la fórmula

$$z_n = (n-1)|x_n| - n|x_{n+1}|$$

Sea s_n la n-ésima suma parcial de $\sum z_n$

$$s_n = -|x_2| + |x_2| - 2|x_3| + \cdots + (n-1)|x_n| - n|x_{n+1}| = -n|x_{n+1}|$$

Por tanto, como existe el límite de $(n|x_{n+1}|)$, existe el de la sucesión (s_n). Por otra parte,

$$|x_m| \leqslant \frac{z_m}{a-1} \quad \text{para} \quad m \geqslant N$$

Del criterio de comparación de segunda especie, se sigue que $\sum |x_m|$ converge.

2) Sean a y b números reales tales que $a < \alpha < b < 1$. Existe un número natural N tal que

$$m|x_m| - m|x_{m+1}| < b|x_m| \quad \text{para} \quad m \geqslant N,$$

o sea,

$$(m - 1)|x_m| < m|x_{m+1}| \quad \text{para} \quad m \geqslant N$$

Así, la sucesión $((m - 1)|x_m|)_{m=N}^{\infty}$ es creciente y, en particular,

$$(m - 1)|x_m| > (N - 1)|x_N| > |x_N| \quad \text{para} \quad m \geqslant N + 1$$

Como $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m-1}$ diverge, se tiene que $\sum |x_m|$ también diverge.

SERIES EN FORMA TELESCOPICA

La propiedad telescópica para las sumas establece que

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1}) = x_1 - x_{n+1},$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_{n+1}$ son números reales. A partir de esta propiedad, si para una serie $\sum y_k$ es posible encontrar una sucesión (x_k) tal que $y_k = x_k - x_{k+1}$ para todo $k \geqslant 1$, entonces $s_n = x_1 - x_{n+1}$, donde s_n es la n-ésima suma parcial de $\sum y_k$. Por otra parte, dada una serie $\sum y_k$ siempre es posible encontrar una de tales sucesiones (x_k) (por ejemplo, $0, -s_1, -s_2, ...$); de hecho, existe una infinidad de sucesiones con la propiedad descrita. En ocasiones, al elegir en forma adecuada una de ellas, puede llegarse a determinar la divergencia o convergencia de la serie $\sum y_k$, e inclusive, en el segundo de los casos su suma. Por ejemplo, considérese la serie

$$\sum \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}$$

Si se define $x_k = 1/2(2k - 1)$ para cada $k \geqslant 1$, entonces

$$y_k = \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} = x_k - x_{k+1}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n + 1)} \quad \text{y} \quad \sum y_k = \frac{1}{2}$$

En general, puede establecerse la proposición siguiente:

PROPOSICION 8.23 Sean (x_k) e (y_k) dos sucesiones tales que para algún número natural n_0 se satisface $y_k = x_k - x_{k+1}$ si $k \geqslant n_0$. Entonces, la serie $\sum_{k=n_0}^{\infty} y_k$ converge si, y sólo si, la sucesión (x_k) converge. En cualquiera de los dos casos,

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} y_k = x_{n_0} - \alpha,$$

donde $\alpha = \text{lím}\, x_k$.

La demostración es inmediata a partir de la igualdad

$$\sum_{k=n_0}^{n} y_k = x_{n_0} - x_{n+1} \quad \text{si} \quad n > n_0$$

EJEMPLOS

1. Sea $y_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   Al hacer $x_n = 1/n$, se tiene $y_n = x_n - x_{n+1}$.
   Así, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.
2. Sea $y_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$.
   Si $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, entonces $y_n = x_n - x_{n+1}$, para todo $n \geqslant 1$. Así, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1$.
3. Sea $y_n = \dfrac{1}{n^2 - 1}$ si $n \geqslant 2$.
   Si se elige $x_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n}\right)$ para todo $n \geqslant 2$, se tiene que $y_n = x_n - x_{n+1}$ si $n \geqslant 2$ y $\sum_{n=2}^{\infty} y_n = \dfrac{3}{4}$.

EJERCICIOS

8.1 Escríbanse los primeros cuatro términos de las sucesiones siguientes:

a) $(8n + 1)$ b) $\left(\dfrac{n}{3n+2}\right)$ c) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)$

8.2 Efectuénse las operaciones siguientes:

a) $\left(\frac{1}{n}\right)(n)$ b) $\frac{(2n^2+n+1)}{(n^2+1)}$ c) $\left(\frac{1}{n+1}\right)+(3n+2)$

8.3 Determínese en los casos siguientes, si (y_k) es una subsucesión de (x_n).

a) $(y_k)=(k^5)$, $(x_n)=(n)$

b) $(y_k)=(k^4)$, $(x_n)=(n^2)$

c) $(y_k)=(k^2)$, $(x_n)=(2n)$

8.4 Determínese cuáles de las sucesiones siguientes son monótonas y si están acotadas superior o inferiormente.

a) $(8n+1)$ b) $\left(\frac{n}{3n+2}\right)$ c) $\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ d) $(\operatorname{sen} n)$ e) $\left(\frac{n}{3^n}\right)$

8.5 Demuéstrese que $n\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ es menor que $\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ para $n\geqslant 1$. [*Sugerencia:* Usese la interpretación geométrica de logaritmo.]

8.6 Pruébese que la sucesión $\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

8.7 Pruébese que una sucesión (x_n) converge a α si, y sólo si, existe un número natural n_0 tal que $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ converge a α.

8.8 Pruébese la proposición 8.20.

8.9 Pruébese que el límite L de cada una de las sucesiones siguientes es el que se indica.

a) $\left(\frac{1}{n^p}\right)$, $p>0$; $L=0$

b) $\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)$; $L=1$

c) $\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)$; $L=1$

d) $(\sqrt{n(n+a)}-n)$; $L=\frac{a}{2}$

e) $((b^n+c^n)^{1/n})$, $b\geqslant c\geqslant 0$; $L=b$

f) $(n|x|^n)$; $L=\begin{cases}0 & \text{si } |x|<1\\ \infty & \text{si } |x|\geqslant 1\end{cases}$

g) $\left(\frac{\log^{\alpha} n}{n^{\beta}}\right)$, $\alpha,\beta>0$; $L=0$

h) $\left(\frac{(e^n)^{\alpha}}{n^{\beta}}\right)$, $\alpha,\beta>0$; $L=\infty$

8.10 Calcúlese el límite, si existe, de cada una de las sucesiones siguientes (puede ser $\pm\infty$):

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n$

c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n^5+n}{n^5-\frac{n}{3}+1}}$

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{n^{3/4}}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)$ si $(x_n) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n+1}{n}, \ldots\right)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+3n+5}{n^4}\right)$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[5]{n}}$

8.11 A partir de la definición, determínese si las sucesiones siguientes son de Cauchy.

a) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}\right)$

b) (x_n) donde $x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$
[*Sugerencia:* Tómese en la condición de Cauchy, $n = 2m$.]

c) $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$; $p > 0$

8.12 Demuéstrense los teoremas 8.8 y 8.9 y la proposición 8.17.

8.13 Demuéstrese que si (x_n) es una sucesión de números reales no negativos y $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{1/n}$, entonces se cumple:

a) $\alpha < 1$ implica que (x_n) converge a cero.

b) $\alpha > 1$ implica que (x_n) diverge a infinito.

c) $\alpha = 1$ no se tiene información.

Este es el llamado *criterio de la raíz* para sucesiones. [*Sugerencia:* Para probar a), demuéstrese que existen $0 < M < 1$ y $0 < N$ tales que $0 \leqslant x_n^{1/n} < M$ si $n \geqslant N$, y aplíquese el Corolario 8.1.]

8.14 Utilizando el ejercicio anterior, determínese la convergencia o divergencia de las sucesiones siguientes:

a) $\left(\dfrac{n^2}{2^n}\right)$ b) $\left(\dfrac{n}{c^n}\right)$ (donde $c > 0$) c) $\left(\dfrac{n^p}{e^n}\right)$ (con $p \geqslant 0$)

8.15 Demuéstrese que una serie de términos no negativos converge o bien diverge a infinito.

8.16 Demuéstrese que:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n^2-1} = \frac{15}{4}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{4\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{4}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 1$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log[(1+1/n)^n(1+n)]}{\log n^n \log(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log 2}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

8.17 Con referencia al apartado f) del ejercicio anterior (con $\alpha = 1/3$), pruébese que

$$\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\cdots=\frac{1}{24}$$

8.18 Demuéstrese que $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge si $p \leqslant 1$.

8.19 Pruébese que $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^4}$ convergen. Usese el criterio de Raabe. Puede probarse que $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ (véase criterio de la integral en el Cap. siguiente.)

8.20 Determínese la convergencia o divergencia de las series siguientes:

a) $\sum \frac{n}{n+1}$ b) $\sum (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ c) $\sum \frac{1}{\sqrt{10n}}$

d) $\sum \frac{2n!}{(n+2)!}$ e) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ f) $\sum \frac{n!}{3^n}$

g) $\sum \frac{2^n}{n}$ h) $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$ i) $\sum \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

j) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n+8}}$ k) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ l) $\sum (-1)^n$

m) $\sum \frac{2^n}{n!}$ n) $\sum \frac{1}{k!}$ ñ) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

o) $\sum \frac{n}{\log n}$ p) $\sum \frac{1}{1+n^2}$ q) $\sum \frac{n}{2^n}$

r) $\sum \frac{1}{(n+k)^2}$; $k \geqslant 0$ s) $\sum (\sqrt[n]{n}-1)^n$ t) $\sum \frac{2+(-1)^n}{6^n}$

u) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ v) $\sum \frac{1}{n^2+2n+3}$ w) $\sum \frac{n^n}{n!}$

x) $\sum \left(\frac{n}{2^n+1}\right)^n$ y) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ z) $\sum \frac{1}{n+100}$

8.21 Determínese para qué valor de x convergen las series siguientes, que son ejemplos de las llamadas *series de potencias.*

a) $\sum \frac{x^n}{2^n}$ b) $\sum \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$ c) $\sum \frac{2x^n}{n^2}$

d) $\sum \frac{3n}{n5^n}x^n$ e) $\sum \frac{x^n}{\log n}$ f) $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n\log^2 n}$

g) $\sum n^2(x-1)^n$ h) $\sum \frac{(-1)^{n-1}(x+4)^n}{3^n(n^2)}$

i) $\sum \frac{(n-2)x^n}{n^2}$ j) $\sum \frac{(-1)^{n-1}\log n\cdot 2^n\cdot x^n}{3^n n^2}$

Puede demostrarse que una serie de potencias converge para todos los puntos de un cierto intervalo (a, b) y diverge en el complemento de $[a, b]$. Se conoce a (a, b) como el *intervalo de convergencia de la serie;* es decir, en los incisos anteriores se trata de determinar dicho intervalo.

8.22 Con el criterio de la raíz, pruébese que si $\lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$, entonces el intervalo $(-1/\alpha, 1/\alpha)$ es el intervalo de convergencia de la serie $\sum a_n x^n$; de hecho, los únicos puntos donde es posible que la serie converja y no están en ese intervalo son $-1/\alpha$ y $1/\alpha$.

Si $\alpha = 0$, entonces la serie converge en todo $\mathbb{R}$, y si $\alpha = \infty$, entonces la serie sólo converge en cero.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 a 1716)

En su obra Hombres de matemáticas, *E. T. Bell comienza diciendo: «El proverbio popular "aprendiz de todo y oficial de nada" tiene, como cualquier otro, sus excepciones espectaculares, y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) es una de ellas.»*

En efecto, el genio universal de Leibniz influyó en campos tan diversos como los de la lógica, matemática, mecánica, geología, jurisprudencia, historia, lingüística y teología. Nacido en Leipzig, Alemania, obtuvo por sí mismo gran parte de su educación estudiando en la biblioteca de su padre.

A la edad de 20 años escribió la tesis De Arte Combinatoria, *trabajo sobre un método universal de razonamiento con el que se graduó de doctor en la Universidad de Altdorf, Alemania, pudiendo así ocupar una plaza de profesor. Durante los años 1670 y 1671 escribió sus primeros trabajos sobre mecánica, y en 1671 fabricó una máquina calculadora.*

Siendo embajador del Elector de Mainz, en 1672, fue en misión política a París, donde conoció a matemáticos y científicos, Huygens entre ellos, aumentando su interés por las matemáticas. Aunque tenía ya antecedentes de trabajo en esta disciplina, él afirmaba que en 1672 empezó a conocerla. Mientras desarrollaba sus funciones de diplomático, profundizaba en sus estudios de matemáticas leyendo a Descartes y a Pascal.

En 1676 fue nombrado bibliotecario y consejero del Elector de Hannover; 24 años después fue invitado por el Elector de Brandenburgo a trabajar en Berlín. A pesar de estar inmiscuido en procesos políticos, desarrolló un gran trabajo en actividades laterales. En 1684 publicó trabajos sobre el cálculo diferencial e integral; la notación utilizada hasta ahora en esta disciplina es suya. Sin embargo, gran parte de sus ideas y de sus resultados nunca fueron publicados y están contenidos en cientos de páginas de notas escritas desde 1673. Algunas de sus ideas se originaron al leer las obras de Gregory de St. Vincent, Fermat, Pascal, Descartes y Barrow.

En su libro Historia et Origo Calculo Differentialis, *expone su pensamiento sobre las ideas del cálculo. Conviene observar que estos trabajos antecedieron a los de Newton sobre el mismo tema, pues éstos aparecieron en 1687. Junto con Newton, Leibniz es considerado el descubridor del cálculo. Murió en el olvido, en 1716.*

En forma paralela a la vida de Leibniz, se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Brugère, La: *Caracteres y retratos,* 1688.
Karamsin: *Cartas de un viajero ruso,* 1690.
Rochefoucauld, La: *Máximas,* 1663.
La Academia Francesa publica su diccionario.

MUSICA

Couperin: *Leçon de Tenèbres,* 1715.
Scarlatti: *Arminio,* 1703.

PINTURA

Mena, Pedro de: *San Francisco,* 1663.
Watteau: *La serenata,* 1715.

ARQUITECTURA

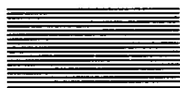
Bernini: *Columnata del Vaticano,* 1665.
Fischer von Erlach: Palacio de Schwarzemberg en Viena, 1697.
Tessin: Palacio Real de Estocolmo, 1688.
Wren: Catedral de San Pablo, Londres, 1675.
Se construye la capilla del Rosario en Tunja, Colombia, 1689.

CULTURA EN GENERAL

Huygens: *Tratado de la luz,* 1691.
Locke: *Ensayo sobre la tolerancia,* 1688.



Gottfried Wilhelm Leibniz



9 INTEGRACION

En matemática se sabe bien que uno de los problemas que dio origen al cálculo integral fue la determinación del área de figuras planas.

Arquímedes, el gran matemático griego (287-212 a. de C.), desarrolló un método conocido como «método de exhaución», o de agotamiento, mediante el cual calculó con precisión áreas de figuras planas. Esto mismo fue utilizado antes por Eudoxo para el cálculo de volúmenes de algunas figuras geométricas (en particular, el de las pirámides de Egipto).

En el siglo XIX se generalizó y formalizó ese método que, en lenguaje moderno, podríamos describir de manera informal, en el caso particular del área del círculo, como sigue: Dado un círculo C y un número natural M, se inscribe en este círculo un polígono regular P_M de M lados y el mismo círculo se circunscribe en otro polígono regular Q_M de M lados (Fig. 9.1).

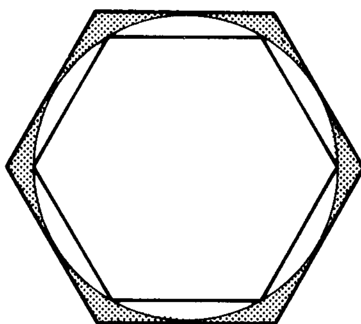


Figura 9.1

Ahora se formarán dos sucesiones de áreas usando dichos polígonos de la manera siguiente:

Una sucesión corresponderá a la de las áreas de los polígonos y la otra a aquella de las áreas de los polígonos excritos. Así, se tienen dos sucesiones de áreas; la primera, la de los polígonos inscritos, está acotada

superiormente por el área de cualquier Q_M; y la segunda, la de los polígonos exinscritos, está acotada inferiormente por el área de cualquier P_M; más aún,

$$\sup_{n \geq 1} (\text{área}\,(P_n)) = \inf_{n \geq 1} (\text{área}\,(Q_n));$$

este valor se llama *área* del círculo C, que, como se sabe, es igual a πr^2, donde r es el radio de C.

De este proceso resaltan dos hechos fundamentales:

A) Se conoce el área de cada P_M y de cada Q_M.

B) Se acepta que, para que un número A sea el valor del área del círculo, éste deberá encontrarse comprendido entre las áreas de P_M y Q_M para cada M y deberá ser el *único* número con tal propiedad; por tanto, debe tenerse

$$\sup_{n \geq 1} (\text{área}\,(P_n)) = \inf_{n \geq 1} (\text{área}\,(Q_n)).$$

Estos hechos se utilizarán para introducir el concepto de área en el caso de regiones acotadas por la gráfica de una función positiva, dos rectas verticales y el eje x lo que, al generalizarse a funciones no necesariamente positivas, llevará al concepto de integral definida.

INTEGRAL DEFINIDA

En este capítulo, a menos que se indique otra cosa, se supondrá que f es una función acotada en $[a, b]$, $a < b$.

Supóngase que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, y considérese la región R comprendida entre las gráficas de la función, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

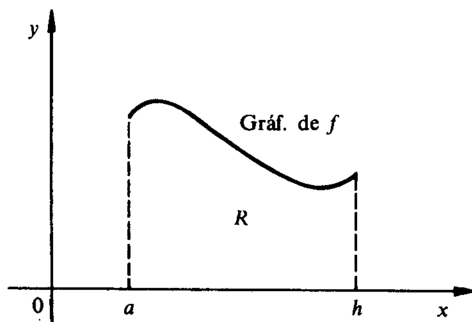


Figura 9.2

Constrúyanse dos sucesiones de regiones que representen un papel análogo a los de P_M y Q_M de la introducción. Para ello, se define una partición P del intervalo $[a, b]$ como un subconjunto de puntos de $[a, b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

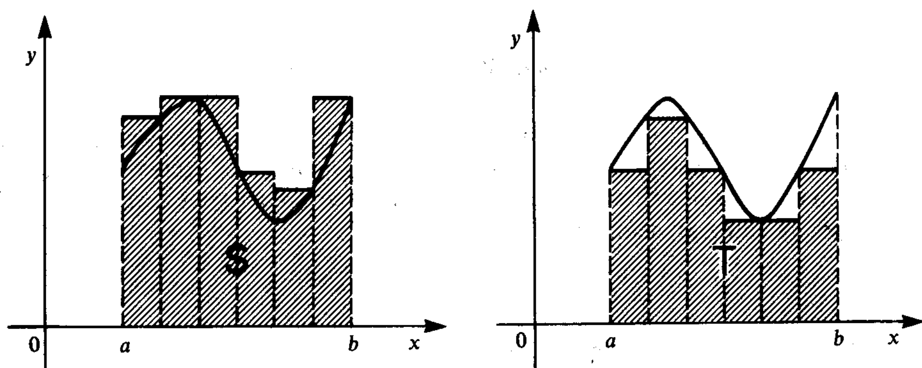
tales que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

La colección de todas las particiones de $[a, b]$ se denotan por $\mathscr{P}[a, b]$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (llamado el i-ésimo intervalo de la partición) considérense el $\sup f(x) = M_i$, con $x \in [x_{i-1}, x_i]$, y el $\inf f(x) = m_i$, con $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Tómense las regiones S y T definidas de la manera siguiente:

S es la unión de rectángulos que tienen por base el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y por altura M_i, en tanto que T es la unión de rectángulos que tienen por base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura m_i (véanse las figuras siguientes).



La partición se tomó con $n = 6$

Es claro que $T \subset R \subset S$ y las áreas de S y T pueden obtenerse con facilidad; más aún, si se denota el área de S por

$$U(P; f)$$

y el área de T por

$$L(P; f)$$

se tiene que

$$U(P; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$L(P; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Por razones obvias se llama a $U(P; f)$ suma superior de f respecto a la partición P y a $L(P; f)$, suma inferior de f respecto a P.

Obsérvese que $U(P; f) \geqslant L(P; f)$.

Lo anterior puede hacerse para cada partición del intervalo. Más adelante

se probará que tanto $\sup L(P;\ f)$, con $P \in \mathscr{P}[a,b]$, como $\inf U(P;\ f)$ con $P \in \mathscr{P}[a,b]$ existen y que

$$\sup_{P \in \mathscr{P}[a,b]} L(P;f) \leqslant \inf_{P \in \mathscr{P}[a,b]} U(P;f)$$

Cuando

$$\sup L(P;f) = \inf U(P;f) \qquad [9.1]$$

se dice que la región tiene área I, donde I es el valor común [9.1]. Obsérvese que para cada $P \in \mathscr{P}[a,b]$ se tiene que

$$L(P;f) \leqslant I \leqslant U(P;f)$$

Si $f(x) \leqslant 0$ en $[a,b]$, y se procede de la misma manera, entonces cada $L(P;f)$ y $U(P;f)$ son negativos, dado que $M_i \leqslant 0$ y $m_i \leqslant 0$.

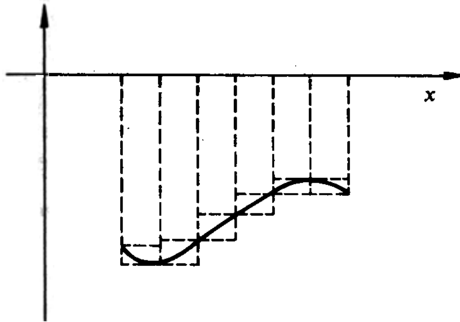


Figura 9.3

Puede suceder que también se tenga en este caso que

$$\sup_{P \in \mathscr{P}[a,b]} L(P;f) = \inf_{P \in \mathscr{P}[a,b]} U(P;f)$$

Por lo anterior este número sería no positivo y, por tanto, resulta conveniente denotarlo por $-I$. Sin embargo, ¿qué significado geométrico puede darse a $-I$?

Como ejercicio puede probarse que

$$-\sup_{P \in \mathscr{P}[a,b]} L(P;f) = \inf_{P \in \mathscr{P}[a,b]} U(P;-f)$$

que

$$-\inf_{P \in \mathscr{P}[a,b]} U(P;f) = \sup_{P \in \mathscr{P}[a,b]} L(P;\ -f)$$

Así,

$$I = \inf_{P \in \mathscr{P}[a,b]} U(P;\ -f) = \sup_{P \in \mathscr{P}[a,b]} L(P;\ -f)$$

Es decir, I es el área de la región acotada por la gráfica de $-f$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Por otra parte, es claro que el área de esta última región es igual a la limitada por la gráfica de f, el eje x, $x = a$ y $x = b$ (Fig. 9.4).

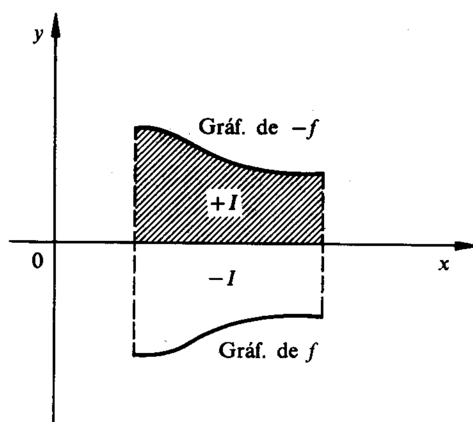


Figura 9.4

Por tanto, el significado geométrico de $-I$ es *menos el área* de esta última región y puede decirse que $-I$ es el *área orientada de esa región.*

Por último, si f cambia de signo en $[a, b]$ y

$$\sup_{P \in \mathscr{P}[a,b]} L(P; f) = \inf_{P \in \mathscr{P}[a,b]} U(P; f) = I,$$

entonces I representa el *área orientada* de la región comprendida entre la gráfica de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x. Así, en el caso de la función sen en $[0, 2\pi]$, I es igual a 0.

área de A − área de B = área de A + área orientada de B.

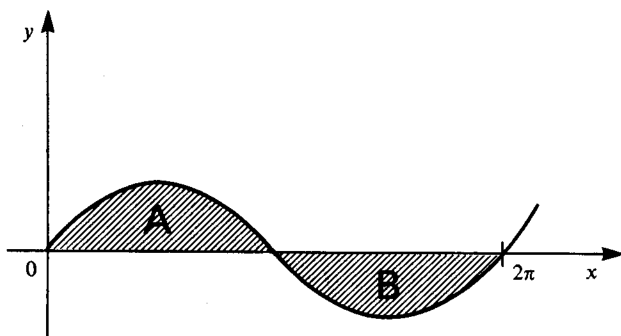


Figura 9.5

DEFINICION 9.1 *Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es integrable en $[a, b]$ si*

$$\sup_{P \in \mathscr{P}[a,b]} L(P; f) = \inf_{P \in \mathscr{P}[a,b]} U(P; f);$$

este valor común se denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

y se denomina integral definida de f en $[a, b]$.

En $\int_a^b f(x)\,dx$, los números a y b se llaman *límites de integración* y la función f recibe el nombre de *integrando.*

Propiedades de las sumas superiores e inferiores

Sean P y P' dos particiones de $[a, b]$ dadas por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

y

$$P' = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$$

P' es un *refinamiento* de la partición P, si cada punto x_i de P pertenece a P'. Se dice también que P' refina a P. Si P' refina a P, entonces la suma superior de P' es menor que la de P y, a la inversa, la suma inferior de P' es mayor que la de P, como se prueba en la proposición siguiente:

PROPOSICION 9.1 Si P' refina a P, entonces se tienen las desigualdades siguientes:

$$L(P; f) \leqslant L(P'; f) \leqslant U(P'; f) \leqslant U(P; f)$$

Demostración

Dado que es posible obtener P' a partir de P mediante un número finito de pasos consistentes, cada uno de ellos, en la adición de un punto, se concluye que es suficiente demostrar la proposición para el caso en que P' tiene exactamente un punto más que P. Sea y tal punto, así

$$P' = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < y < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\};$$

sean M'_1, M'_2 y M los supremos respectivos de f en los subintervalos $[x_k, y]$, $[y, x_{k+1}]$ y $[x_k, x_{k+1}]$.

Si $x \in [x_k, y]$, entonces $x \in [x_k, x_{k+1}]$ y, por tanto, $f(x) \leqslant M$. Así, M es una

cota superior para los valores de f en $[x_k, y]$, por lo que $M_1 \leqslant M$ y, en forma análoga, $M_2 \leqslant M$.

Las desigualdades anteriores implican que

$$M_1(x_1 - x_0) + \cdots + M'_1(y - x_k) + M'_2(x_{k+1} - y) + \cdots +$$
$$+ M_n(x_n - x_{n-1}) \leqslant M_1(x_1 - x_0) + \cdots + M(x_{k+1} - x_k) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

Es decir,

$$U(P';f) \leqslant U(P;f).$$

La demostración para las sumas inferiores es similar.

Como se mencionó, una suma inferior $L(P_1;f)$ es menor o igual que cualquier suma superior $U(P_2;f)$; esto se prueba como sigue.

PROPOSICION 9.2 Sean P_1 y P_2 dos particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces

$$L(P_1;f) \leqslant U(P_2;f) \qquad [9.2]$$

Demostración

Tómese la partición $P = P_1 \cup P_2$. Entonces, por la proposición 9.1, se tiene que

$$L(P_1;f) \leqslant L(P;f) \leqslant U(P;f) \leqslant U(P_2;f)$$

En vista de la desigualdad [9.2] se infiere que los conjuntos

$$\{U(P;f) \mid P \text{ es partición de } [a,b]\} \qquad [9.3]$$
$$\{L(P;f) \mid P \text{ es partición de } [a,b]\} \qquad [9.4]$$

tienen cotas inferior y superior, respectivamente. De hecho, el conjunto [9.3] está acotado inferiormente por $L(P_0;f)$ y el conjunto [9.4] está acotado superiormente por $U(P_0;f)$, donde P_0 es una partición cualquiera de $[a, b]$. Por tanto, existen el ínfimo $\bar{I}$ del conjunto [9.3] y el supremo $\underline{I}$ de [9.4]. Así, también, se tiene que se tiene que

$$\underline{I} \leqslant \bar{I}. \qquad [9.5]$$

$\bar{I}$ se conoce como *integral superior* de f en $[a, b]$, y también se denota por $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. $\underline{I}$ se llama *integral inferior* de f en $[a, b]$ y también se denota por $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Así, la definición 9.1 puede expresarse como sigue:

DEFINICIÓN 9.2 *Se dice que f es integrable en $[a, b]$ si $\underline{I} = \bar{I}$.*

TEOREMA 9.1 f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición de P de $[a, b]$ tal que

$$U(P;f) - L(P;f) < \varepsilon \qquad [9.6]$$

Demostración
Si f es integrable, entonces

$$\underline{I} = \overline{I}$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existen particiones P_1, P_2 de $[a, b]$ tales que

$$\underline{I} - \varepsilon/2 < L(P_1; f) \leqslant \underline{I} = \overline{I} \leqslant U(P_2; f) < \overline{I} + \varepsilon/2,$$

y si $P = P_1 \cup P_2$, entonces se tiene que

$$\underline{I} - \varepsilon/2 \leqslant L(P_1; f) \leqslant L(P; f) \leqslant \underline{I} = \overline{I} \leqslant U(P; f) \leqslant U(P_2; f) < \overline{I} + \varepsilon/2$$

Al hacer la resta correspondiente se obtiene [9.6].

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, se escoge una partición P de $[a, b]$ tal que se cumpla [9.6]; entonces,

$$L(P; f) \leqslant \underline{I} \quad \text{e} \quad \overline{I} \leqslant U(P; f);$$

por tanto,

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon,$$

y, como ε es arbitrario, entonces $\underline{I} = \overline{I}$.

COROLARIO 9.1 f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$ tal que si P' es un refinamiento de P, entonces $U(P'; f) - L(P'; f) < \varepsilon$.

Demostración
Se sigue de la definición 9.1 y del teorema 9.1.

INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

DEFINICION 9.3 *Se dice que f es* uniformemente continua *en un subconjunto A de* $\mathbb{R}$ *si dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad x, y \in A \quad \text{y} \quad |x - y| < \delta.$$

La definición anterior es necesaria para probar el teorema siguiente:

TEOREMA 9.2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

A continuación se analizará de forma breve el concepto involucrado en la definición 9.3.

Obsérvese que mientras en la definición de continuidad el número δ depende tanto de $x_0 \in A$ como de ε, en ésta δ sólo depende de ε y no del punto particular.

Para aclarar estas ideas se dará un ejemplo de una función que es continua, pero no uniformemente continua, y otro de una uniformemente continua.

EJEMPLOS

1. Considérese la función x^2 definida en todo $\mathbb{R}$. Se sabe que es una función continua. En efecto, sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $0 < \varepsilon < 1$. Entonces,

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| \leqslant (1 + 2|x_0|)|x - x_0|$$

si $|x - x_0| < 1$. Así, $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \varepsilon/(1 + 2|x_0|)$. Obsérvese que la δ obtenida $[=\varepsilon/(1 + 2|x_0|)]$ depende tanto de ε como del punto x_0; más aún, conforme x_0 toma un valor absoluto más grande, la δ se reduce más cada vez, no obstante que $\varepsilon > 0$ se mantenga fijo.

Se resalta esto último porque podría pensarse que la δ buscada para satisfacer la condición de continuidad uniforme podría ser la mínima obtenida para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, pero, como ya se vio, el ínfimo en este caso es igual a cero, valor que no puede tomar δ.

Lo visto anteriormente no es una prueba formal de que la función considerada no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$; pero lo sugiere.

2. La función anterior restringida al intervalo $[0, 1]$ *sí* es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$; tómese $0 < \varepsilon' < \text{mín}(1, \varepsilon)$, por lo anterior,

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon' \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}$$

Como $\varepsilon'/(1 + 2|x_0|) \geqslant \varepsilon'/3$ si $x \in [0, 1]$, se concluye que

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon' < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - y| < \varepsilon'/3, \quad x, y \in [0, 1]$$

Estos dos ejemplos muestran la importancia de la naturaleza del dominio de la función para que ésta sea uniformemente continua.

Es claro que toda función uniformemente continua es continua; sin embargo, el recíproco, en general, no es cierto, como lo ilustra el ejemplo 1.

Por el teorema siguiente puede verse que el recíproco es cierto si el dominio de la función es de cierto tipo.

TEOREMA 9.3 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Demostración

Supóngase que f no es uniformemente continua en $[a, b]$; es decir, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen x e $y \in [a, b]$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{y} \quad |x - y| < \delta$$

En especial, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen x_n, y_n en $[a, b]$ tales que

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{y} \quad |x_n - y_n| < 1/n$$

Como (x_n) es una sucesión de $[a, b]$ se tiene que existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge a un punto $x_0 \in [a, b]$. Por otra parte,

$$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k});$$

y $\lim (y_{n_k} - x_{n_k}) = 0$, ya que $|y_{n_k} - x_{n_k}| < 1/n_k$, de donde $\lim y_{n_k} = x_0$.

Dado que f es continua en $[a, b]$, se concluye que

$$\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = f(x_0),$$

y, así, $\lim |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$, lo cual contradice que

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$$

Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$.

El número $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1})$ se llama *norma de la partición P* y se denota por ΔP.

Ahora se demostrará el teorema 9.2.

Demostración

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a)$ si $x, y \in [a, b]$ y $|x - y| < \delta$.

Sea P una partición, con $\Delta P < \delta$; si P consta de los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, entonces los valores máximo y mínimo de f en cada $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, ..., n$, respectivamente, distan entre sí menos que $\varepsilon/(b - a)$, por tanto, se tiene que

$$U(P; f) - L(P; f) = (M_1 - m_1)(x_1 - a) + \cdots + (M_n - m_n)(b - x_{n-1}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b - a}(x_1 - a + \cdots + b - x_{n-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon$$

Del teorema 9.1 se sigue nuestra afirmación.

El resultado anterior puede generalizarse así:

TEOREMA 9.4 Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua excepto en un número finito de puntos. Entonces f es integrable en $[a, b]$.

Demostración

Supóngase primero que f es discontinua en un solo punto c y éste pertenece a (a, b).

Se probará que para cada $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathscr{P}[a, b]$ tal que $U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon$. Por el teorema 9.1 se sabrá entonces que f es integrable en $[a, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Escójase y, $y' \in (a, b)$ de tal manera que $y < c < y'$ e $y - y' < \dfrac{\varepsilon}{3(M - m)}$ donde $M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$ y $m = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$ (recuérdese que al principio del capítulo se indicó que todas las funciones se supondrían acotadas).

Como f es continua en $[a, y]$ y en $[y', b]$, el teorema 9.2 permite saber que f es integrable en cada uno de esos dos intervalos. Por tanto, existen dos particiones Q y R de $[a, y]$ e $[y', b]$, respectivamente, tales que

$$U(Q; f) - L(Q; f) < \varepsilon/3$$

y

$$U(R; f) - L(R; f) < \varepsilon/3$$

Sea $P = Q \cup \{y, y'\} \cup R$. Entonces P es una partición de $[a, b]$ y

$$U(P; f) - L(P; f) = U(Q; f) - L(Q; f) + (M^* - m^*)(y' - y) + \\ + U(R; f) - L(R; f),$$

donde

$$M^* = \sup\{f(x) \mid x \in [y, y']\}$$

y

$$m^* = \inf\{f(x) \mid x \in [y, y']\}$$

Es claro que

$$M^* \leqslant M \quad \text{y} \quad m \leqslant m^*$$

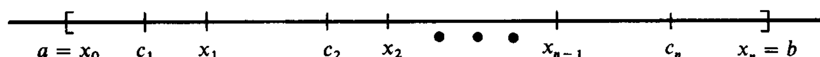
Así,

$$U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon/3 + (M - m)(y' - y) + \varepsilon/3$$

Y, por la elección de y e y', se concluye que $U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon$, como quería demostrarse.

Cuando $c = a$ o $c = b$, se procede en forma análoga.

Ahora supóngase que f es discontinua en n puntos de $[a, b]$, digamos en $c_1, c_2, ..., c_n$. Supóngase también que $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. Escójase una partición $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ de $[a, b]$, como se indica en la figura siguiente:



Es decir, $c_1 \in [a, x_1)$, $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ para $2 \leqslant i \leqslant n - 1$ y $c_n \in (x_{n-1}, b)$.

Por lo demostrado en primer lugar, se tiene que f es integrable en $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, ..., n$. Más adelante (Corolario 9.2) se probará que esto es suficiente para demostrar la integrabilidad de f en $[a, b]$.

SUMAS DE RIEMANN

Dada una función f sobre el intervalo $[a, b]$ y una partición P de $[a, b]$, se elige un punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; entonces, la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

denotada por $S(P; f)$ se llama *suma de Riemann de f correspondiente* a la partición P. Nótese que para f y P dadas hay infinidad de sumas de Riemann, pues la elección de cada ξ_i tiene por única restricción

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Para toda partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, se tiene que

$$L(P; f) \leqslant S(P; f) \leqslant U(P; f)$$

para cualquier elección de puntos intermedios ξ_i que se elijan para formar $S(P; f)$, ya que

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i,$$

donde

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{y} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

En términos de las sumas de Riemann, la integrabilidad de una función puede caracterizarse de la manera siguiente:

TEOREMA 9.5 Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. f es integrable si, y sólo si, existe I tal que para toda sucesión de particiones P_n tal que

$$\lim_{n \to \infty} \Delta P_n = 0;$$

se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} S(P_n; f) = I$$

Donde este límite significa que para cada elección de puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, la sucesión de números $S(P_n; f)$ converge a I. Más aún, en este caso,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Demostración
Se omite.

Observación Si se sabe que f es integrable (por ejemplo, si f es continua), es posible calcular su integral tomando una sucesión P_n, como en el

teorema anterior, y una elección particular de puntos intermedios para formar las $S(P_n; f)$; al determinar el límite de esta sucesión se conocerá la integral.

EJEMPLOS

1. Dada la función x^2 en el intervalo $[0, 1]$, se escoge para cada número natural n la partición

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}$$

y se toma a ξ_i igual a i/n, es decir, al extremo derecho del intervalo $[(i-1)/n, i/n]$; por tanto, la suma de Riemann para f respecto a P_n resulta ser

$$S_n(P_n; f) = \left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n} - 0\right) + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)^2 +$$
$$+ \cdots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

Al efectuar las operaciones, se tiene

$$S_n(P_n; f) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2};$$

al sacar como factor común a $1/n^3$, se obtiene

$$S_n(P_n; f) = \frac{1}{n^3}[1 + 4 + 9 + \cdots + n^2]$$

El factor de la derecha de este producto es

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

lo que se prueba mediante métodos algebraicos; por tanto, la suma da

$$\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Para n cada vez más grande, se tiene que P_n tiene más puntos, los intervalos $[(i-1)/n, i/n]$ son más pequeños, el número $1/n$ tiende a cero y, por tanto, $S_n(P_n;f)$ se acerca a $(1/6)\cdot 2 = 1/3$, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \tfrac{1}{3}$$

De acuerdo con la observación anterior al ejemplo, esto muestra que

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

2. Considérese la función e^x en el intervalo $[a, b]$, y para cada n dése la partición P_n que divide al intervalo $[a, b]$ en subintervalos de igual longitud $(b - a)/n$. Sea ξ_i el extremo izquierdo x_{i-1} del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. La suma de Riemann $S_n(P_n; f)$ de e^x respecto a P_n, y para esos ξ_i, es

$$S_n(P_n; f) = e^a\left(\frac{b-a}{n}\right) + e^{x_1}\left(\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + e^{x_{n-1}}\left(\frac{b-a}{n}\right);$$

al sacar como factor común a $[(b - a)/n]$, se tiene

$$S_n(P_n; f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(e^a + e^{x_1} + \cdots + e^{x_{n-1}});$$

pero $x_i = a + i\,[(b - a)/n]$; así, resulta

$$S_n(P_n; f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(e^a + e^{a+[(b-a)/n]} + \cdots + e^{a+(n-1)[(b-a)/n]})$$

El factor de la derecha es una suma de una progresión geométrica de razón $e^{(b-a)/n}$; por tanto,

$$S_n(P_n; f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)e^a \cdot \frac{e^{n[(b-a)/n]} - 1}{e^{(b-a)/n} - 1} = \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)(e^a e^{b-a} - e^a)}{e^{(b-a)/n} - 1}$$

$$= (e^b - e^a)\frac{\frac{b-a}{n}}{e^{(b-a)/n} - 1}$$

Se sabe que $(b - a)/n \to 0$ cuando $n \to \infty$; por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} e^{(b-a)/n} = 1$$

Además, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b-a}{n}}{e^{(b-a)/n} - 1} = 1 \quad \text{(de acuerdo con la regla de L'Hôpital)}$$

Por todo lo anterior,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = e^b - e^a;$$

o sea,

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$$

3. Considérese la función $f(x) = c$, donde c es constante, en el intervalo $[a, b]$ y, para cada n, dése la partición P_n tal que el intervalo $[a, b]$ quede

subdividido en n subintervalos iguales de longitud $(b - a)/n$. Sea ξ_i cualquiera de los extremos, digamos el derecho, del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la suma de Riemann $S_n(P_n; f)$ de f respecto a P_n, y los puntos ξ_i, es

$$S_n(P_n; f) = c\frac{b-a}{n} + \cdots + c\frac{b-a}{n} = c\left(\frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$
$$= nc\frac{b-a}{n} = c(b - a)$$

Así pues,

$$\text{lím}\, S_n(P_n; f) = c(b - a)$$

O sea,

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$$

Obsérvese que si en lo anterior $c = 1$, entonces $\int_a^b dx = b - a$, y así la integral de la función constante 1 es la longitud del intervalo de integración $[a, b]$.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEOREMA 9.6 Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, entonces

1) $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
(Propiedad aditiva de la integral)

2) $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
(Propiedad homogénea de la integral)

Estas dos propiedades reciben el nombre de *propiedades lineales de la integral.*

Demostración

1) Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Considérese una suma de Riemann $S(P; f + g)$ de $f + g$ respecto a esta partición. Es decir,

$$S(P; f + g) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) + g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}),$$

donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Es claro que $S(P; f + g) = S(P; f) + S(P; g)$ si para las últimas dos sumas $S(P; f)$ y $S(P; g)$ se escogen los mismos puntos ξ_i.

Sea (P_n) una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que $\Delta P_n \to 0$. Entonces,

$$\lim S(P_n; f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \lim S(P_n; g) = \int_a^b g(x)\,dx$$

(Teorema 9.5.)

Por lo señalado al principio de la demostración, se tiene

$$S(P_n; f + g) = S(P_n; f) + S(P_n; g) \quad \text{para todo } n.$$

En consecuencia, $\lim S(P_n; f + g)$ existe y es igual a $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. Por esto y por el teorema 9.5, se concluye que $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y, además,

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2) Este inciso se demuestra en forma análoga y se deja al lector como ejercicio.

TEOREMA 9.7 Si f es una función integrable en $[a, b]$, entonces f es integrable en todo subintervalo $[a', b']$ $(a' < b')$ de $[a, b]$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por el corolario 9.1, existe una partición de P_ε de $[a, b]$ tal que

$$U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon \quad \text{si} \quad P_\varepsilon \subset P$$

Si $P_0 = P_\varepsilon \cup \{a', b'\}$, entonces $P_\varepsilon \subset P_0$ y, por tanto,

$$U(P_0; f) - L(P_0; f) < \varepsilon$$

Defínase $Q = P_0 \cap [a', b']$. Q es una partición de $[a', b']$ tal que todos sus subintervalos son subintervalos de P_0, por lo que

$$U(Q; f) - L(Q; f) \leqslant U(P_0; f) - L(P_0; f) < \varepsilon$$

Del teorema 9.1 se sigue que f es integrable en $[a', b']$.

TEOREMA 9.8 Sean $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$. f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$.

En cualquiera de los dos casos,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Demostración

Supóngase que f es integrable en $[a, b]$. Por el teorema anterior, f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. Para probar que en este caso se cumple la igualdad enunciada

para las integrales, considérense dos sucesiones (P_n') y (P_n'') de particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, tales que $\Delta P_n' \to 0$ y $\Delta P_n'' \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Para cada $n \geqslant 1$, defínase $P_n = P_n' \cup P_n''$. Cada P_n es una partición de $[a, b]$ y $\Delta P_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Es claro que $S(P_n; f) = S(P_n'; f) + S(P_n''; f)$ para todo $n \geqslant 1$, si en $S(P_n; f)$ se escogen como puntos intermedios aquellos elegidos para formar $S(P_n'; f)$ y $S(P_n''; f)$.

Por el teorema 9.5, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n; f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} S(P_n'; f) = \int_a^c f(x)\,dx$$

y también,

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n''; f) = \int_c^b f(x)\,dx$$

Así,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

A la inversa, supóngase que f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existen dos particiones P' y P'' de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, tales que

$$U(P'; f) - L(P'; f) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad U(P''; f) - L(P''; f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Defínase $P = P' \cup P''$. P es una partición de $[a, b]$ y

$$U(P; f) = U(P'; f) + U(P''; f) \quad \text{y} \quad L(P; f) = L(P'; f) + L(P''; f)$$

Al sumar miembro a miembro las desigualdades (A), se obtiene

$$U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon$$

En consecuencia, f es integrable en $[a, b]$ y, por la primera parte del teorema, se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

COROLARIO 9.2 Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$, f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, f es integrable en $[x_{i-1}, x_i]$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. En cualquiera de los dos casos,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

Demostración

Se establece por inducción.

Observación Resulta útil (véase, por ejemplo, la demostración del segundo teorema fundamental del cálculo) definir también $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $b \leqslant a$. Así, se define

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ para toda función f definida en a, e $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ si $b < a$ y f es integrable en $[b, a]$.

Con estas dos definiciones se tiene que la igualdad $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ es válida siempre que las tres integrales existan (de hecho, la existencia de cualesquiera dos de ellas implica la de la tercera), sin importar si satisface o no la condición $a < c < b$ aparecida en el teorema 9.8. Más aún, una afirmación del mismo tipo puede darse para la igualdad del corolario 9.2.

Por ejemplo, si $\int_0^1 f(x)\,dx$ y $\int_0^{-1} f(x)\,dx$ existen (lo que para la última significa que f es integrable en $[-1, 0]$), entonces

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

En efecto, como f es integrable en $[-1, 0]$ y en $[0, 1]$, entonces, por el teorema 9.8, f es integrable en $[-1, 1]$ y, además,

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx$$

Por tanto,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_0^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

En particular, si $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, entonces $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$. Así, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, sin importar si $a \geqslant b$ o $b \geqslant a$.

TEOREMA 9.9 Sean f y g integrables en $[a, b]$. Entonces:

1) $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$ implica que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
2) $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ implica que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$ (monotonía de la integral).
3) $m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$ si m es una cota inferior de f en $[a, b]$ y M es una cota superior de f en $[a, b]$. En particular, si f es continua en $[a, b]$, entonces m y M pueden representar el mínimo y el máximo de f en $[a, b]$, respectivamente.

Demostración

1) Sea $P \in \mathscr{P}[a, b]$. $U(P; f) \geqslant 0$, ya que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$. Así,

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqslant 0;$$

pero como f es integrable, se tiene que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

2) $f(x) - g(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$.
De 1) se sigue que

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geqslant 0$$

Finalmente, por las propiedades lineales de la integral, se concluye que

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

3) $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$. Al aplicar 2) y lo obtenido en el ejemplo 3, se llega al resultado.

COROLARIO 9.3 Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Demostración
La primera desigualdad es inmediata. La segunda sólo se probará cuando f es continua en $[a, b]$. En este caso, $|f(x)|$ es continua en $[a, b]$ y, por tanto, integrable en ese intervalo. Además, si $I = \int_a^b f(x)\,dx$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx & \text{si} \quad I \geqslant 0 \\ -\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b -f(x)\,dx & \text{si} \quad I < 0 \end{cases}$$

Por otra parte, $f(x) \leqslant |f(x)|$ y $-f(x) \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$. En consecuencia, el resultado se sigue del inciso 3) del teorema 9.9.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

A continuación se da un teorema para integrales, análogo al teorema del valor medio para derivadas, en el cual la hipótesis de continuidad es esencial y no puede sustituirse por la de integrabilidad.

TEOREMA 9.10 Si f es una función continua en un intervalo que contiene los puntos a y b, entonces existe c entre a y b tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

Demostración

Supóngase que $a < b$. f es entonces continua en $[a, b]$. Por tanto, existen x_0 e y_0 en $[a, b]$ tales que $f(x_0) = m$ y $f(y_0) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$, respectivamente. Del inciso 3) del teorema 9.9 se sigue

$$m = f(x_0) \leqslant \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M = f(y_0)$$

Si

$$f(x_0) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

o bien

$$f(y_0) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

entonces el resultado se obtiene al escoger $c = x_0$, o bien $c = y_0$, respectivamente. En caso contrario,

$$m < \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx < M,$$

y por el teorema del valor intermedio, se sabe que existe un punto c en $[x_0, y_0]$ (así, $c \in [a, b]$) tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

Supóngase ahora que $b < a$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Por lo antes probado, existe $c \in [b, a]$, tal que

$$\int_b^a f(x)\,dx = f(c)(a - b)$$

En consecuencia,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -f(c)(a - b) = f(c)(b - a)$$

Por último, cuando $a = b$ se escoge $c = a$.

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO. UNA PRIMITIVA DE UNA FUNCION CONTINUA. CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Existe un método que permite encontrar, para cada función continua definida en un intervalo cerrado, una primitiva de dicha función en ese intervalo.

Este método se obtiene utilizando la integral definida, y de hecho se empleó en el capítulo 7, al introducir a $\log x$ como una primitiva de $1/x$. En el teorema siguiente se expone el método.

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO Sea f una función integrable en $[a, b]$. Defínase $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para cada $x \in [a, b]$. Entonces:

1) F es una función continua en $[a, b]$.
2) Si f es además continua, entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. O sea, F es una primitiva de f en $[a, b]$.

Demostración

Como f es integrable en $[a, b]$, resulta que f es integrable en $[a, x]$ para cada $x \in [a, b]$ (Teorema 9.8). Por tal motivo, puede definirse una función F de la manera indicada.

1) f es acotada, pues, como se recordará, sólo se ha definido la integral para funciones acotadas. Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$. Supóngase que x, $x_0 \in [a, b]$. Entonces,

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Por tanto,

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \begin{cases} \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt & \text{si} \quad x_0 \leqslant x \\ \int_x^{x_0} |f(t)|\,dt & \text{si} \quad x \leqslant x_0 \end{cases}$$

Y, por la monotonía de la integral, se tiene

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \begin{cases} M(x - x_0) & \text{si} \quad x_0 \leqslant x \\ M(x_0 - x) & \text{si} \quad x \leqslant x_0 \end{cases}$$

Es decir, $|F(x) - F(x_0)| \leqslant M|x - x_0|$. De donde se sigue en forma inmediata que F es continua en x_0, y al ser éste un punto arbitrario de $[a, b]$, se concluye que F es continua en $[a, b]$.

2) Supóngase que f es continua en $[a, b]$. Sean x y x_0 dos puntos de $[a, b]$ y supóngase que $x \neq x_0$.

Como antes,

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe c_x, entre x y x_0, tal que $F(x) - F(x_0) = f(c_x)(x - x_0)$. Así, para cada $x \in [a, b]$, distinto de x_0, existe c_x entre x y x_0 tal que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c_x)$$

Por otra parte, $c_x \to x_0$ cuando $x \to x_0$, y como f es continua en x_0, se obtiene

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Es decir, $F'(x_0) = f(x_0)$. Para la demostración del teorema siguiente es necesario recordar que dos primitivas de una función f, definida en un intervalo, difieren por una constante. Así, si F y G están definidas en $[a, b]$ y satisfacen $F'(x) = G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO Sea f una función continua en $[a, b]$. Si F es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para cada $x \in [a, b]$. G es una primitiva de f en $[a, b]$, por el segundo teorema fundamental del cálculo. Por tanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a, b];$$

en particular,

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c = c \qquad \text{y} \qquad F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c$$

De donde,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

(Obsérvese que el nombre de la variable de integración es irrelevante. Así, resulta lo mismo escribir $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(x)\,dx$ o $\int_a^b f(z)\,dz$.

Este teorema ofrece una manera de encontrar el valor de una integral

definida con integrando continuo y, prácticamente, fue el único método utilizado para tal fin en los inicios del cálculo.

La notación $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ es cómoda cuando se evalúan integrales y se utilizará de aquí en adelante.

EJEMPLOS

1. $\displaystyle\int_0^2 3x^3\,dx = \tfrac{3}{4}x^4\Big|_0^2 = 12.$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log x\Big|_1^2 = \log 2.$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2.$
4. $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} \lambda\,dx = \lambda x\Big|_{\log 2}^{\log 3} = \lambda(\log 3 - \log 2)$, donde λ es una constante.

INTEGRALES IMPROPIAS

Al introducir el concepto de integral definida se exigió que las funciones por considerar estuvieran definidas en intervalos cerrados, con extremos finitos, y fueran acotadas en esos intervalos. Ahora se suprimen esas restricciones y se darán definiciones que explicarán símbolos tales como

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Obsérvese en el primero que ∞ aparece como límite de integración y, en el segundo, que el integrando $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ no está definido en $x = 1$, ni es acotado en $[0, 1)$ (de hecho, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \infty$).

En realidad, dichas definiciones se formularán, según el procedimiento empleado a continuación, para asignar valores a

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Recuérdese que, para una función f integrable en $[a, b]$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área (orientada) de la región $R = \{(x, f(x)) \mid a \leqslant x \leqslant b\}$; esto y el que la región $R_1 = \{(x, 1/(1+x^2)) \mid x \geqslant 0\}$ (véase Fig. 9.6) está relacionada con $\int_0^\infty dx/(1+x^2)$; del mismo modo que R lo está con $\int_a^b f(x)\,dx$, nos sugiere que es

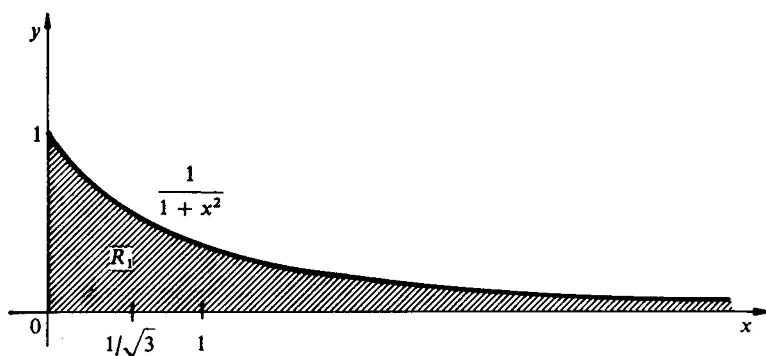


Figura 9.6

adecuado definir el valor de $\int_0^\infty dx/(1+x^2)$ igual al área de la región R_1, lo cual será posible en tanto pueda definirse dicha área. Para esto último se observa que $\int_0^b dx/(1+x^2)$ existe para cada $b > 0$ y su valor ang tan b es igual al área de

$$R_1(b) = \left\{\left(x, \frac{1}{1+x^2}\right) \middle| \, 0 \leqslant x \leqslant b\right\} \quad \text{(Fig. 9.7)}$$

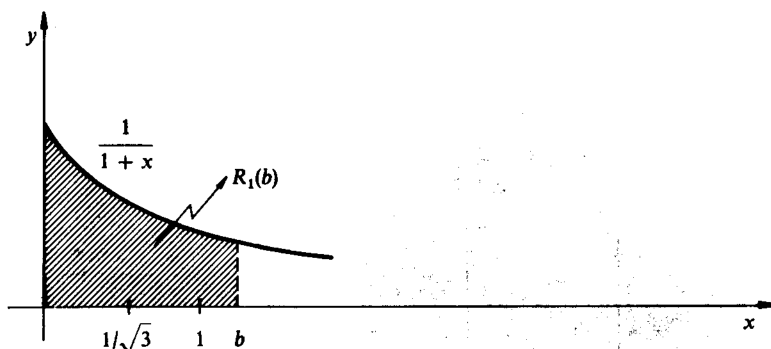


Figura 9.7

Además, $R_1(b)$ tiende a cubrir a R_1 cuando $b \to \infty$. Por consiguiente, como

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \text{ang tan } b$$

existe y es igual a $\pi/2$, resulta natural definir área de $R_1 = \pi/2$; por lo antes dicho, también se tendrá que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$$

Es posible desarrollar un estudio similar para

$$R_2 = \left\{\left(x, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \middle| \, 0 \leqslant x \leqslant 1\right\} \quad \text{(Fig. 9.8)}$$

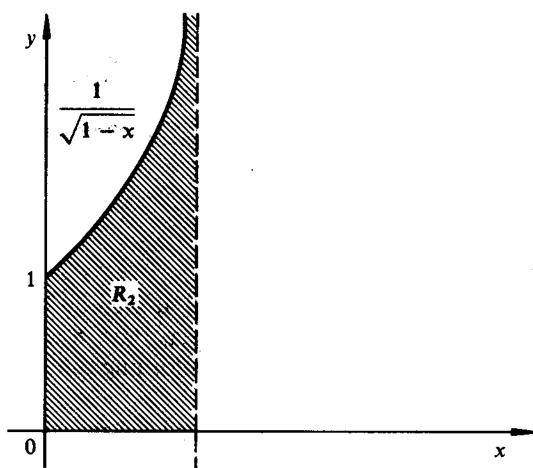


Figura 9.8

si se consideran las regiones

$$R_2(c) = \left\{\left(x, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \middle| \, 0 \leqslant x \leqslant c\right\} \quad \text{(Fig. 9.9)}$$

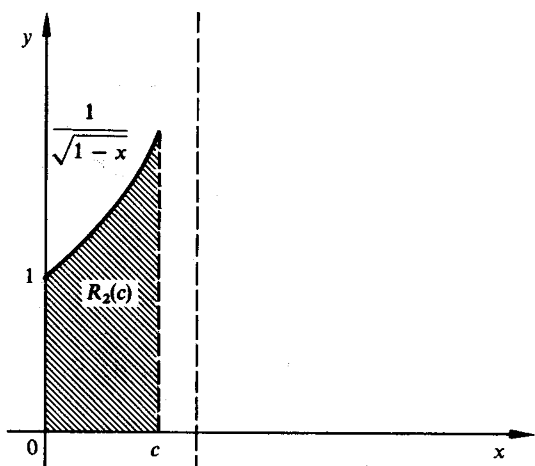


Figura 9.9

para cada $0 < c < 1$. Y ya que

$$\lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1^-} -2(1-x)^{1/2}\Big|_0^c$$

y

$$\lim_{c\to 1^-} 2(1-(1-c)^{1/2}) = 2$$

se define el valor de

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

igual a 2. Por esto se establecen, en general, las definiciones siguientes:

DEFINICION 9.4 *Sea f una función definida en $[a, \infty)$ e integrable en $[a, b]$ para cada $b > a$. Si $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existe y su valor es α, entonces se dice que existe la* integral impropia de la primera clase $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *y su valor es α. En este caso, se dice también que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente y, en caso contrario, que es divergente.*

DEFINICION 9.5 *Sea f una función definida en $[a, b]$, excepto, quizás, en b. Supóngase que f es integrable en $[a, c]$ para cada $a < c < b$. Si* $\lim_{c\to b^-}$ *$\int_a^c f(x)\,dx$ existe y es igual a β, se dice que existe la* integral impropia de la segunda clase $\int_a^b f(x)\,dx$ *y su valor es β. En este caso se dice también que $\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente y, en caso contrario, que es divergente.*

Obsérvese que en la última definición no se pidió que f sea no acotada en $[a, b)$; así es aplicable a una clase más amplia de funciones que la sugerida por el ejemplo $\int_0^1 dx/\sqrt{1-x}$. Se resalta también que, así como para las series se usó $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ para denotar tanto la sucesión de sumas parciales, como su límite, si éste existía, ahora se utiliza el mismo símbolo $\int_a^\infty f(x)\,dx$ o $\int_a^b f(x)\,dx$ para denotar nuestro objeto de estudio y el valor al que converge, cuando esto suceda.

De manera análoga puede definirse la convergencia de la integral impropia $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ para una función f definida en $(-\infty, b]$ e integrable en $[a, b]$ para cada $a < b$; y si f está definida en $(-\infty, \infty)$ y es integrable en cada intervalo cerrado con extremos finitos, entonces se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente si $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ y $\int_0^\infty f(x)\,dx$ son convergentes; y en este caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx \qquad [9.7]$$

Si las integrales del lado derecho de [9.7] son convergentes, también lo son

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y, entonces, en esa igualdad puede sustituirse 0 por a (Ejercicio 9.14).

Las integrales $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se llaman también *integrales impropias de la primera clase.*

Observación Si existe $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$, entonces se llama el *valor principal de Cauchy* de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Puede probarse que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{(Ejercicio 9.15).}$$

Sin embargo, es posible que exista el valor principal de Cauchy de una integral impropia y ésta sea divergente. Por ejemplo, $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} x\,dx = 0$ y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ es divergente, ya que $\int_{0}^{\infty} x\,dx$ lo es.

Es posible formular una definición análoga a la 9.15 para definir la convergencia de $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, donde f está definida en $[a, b]$, excepto, quizás, en a, y es integrable en $[c, b]$ para cada $a < c < b$. (Ahora tendrá que considerarse el límite en a por la derecha de $F(c) = \int_{c}^{b} f(x)\,dx$.) Por último, si f está definida en $[a, b]$, excepto, quizás, en $c_0 \in (a, b)$, y las integrales

$$\int_{a}^{c_0} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_{c_0}^{b} f(x)\,dx$$

son convergentes, decimos entonces que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ es convergente y, en este caso, se tiene que

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c_0} f(x)\,dx + \int_{c_0}^{b} f(x)\,dx$$

Las integrales del párrafo anterior también se llaman integrales impropias de segunda clase.

CONVERGENCIA DE LAS INTEGRALES IMPROPIAS

Para determinar la convergencia o divergencia de algunas integrales impropias se darán algunos criterios.

PROPOSICION 9.3 Sea f una función definida en $[a, b]$, excepto, quizás, en b, e integrable en $[a, c]$ para cada $a < c < b$. Si f es acotada en $[a, b)$, entonces $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ es convergente. Más aún, si f además está definida en b, la integral impropia es igual a la integral definida de f en $[a, b]$.

De esta proposición, que no se probará, se sigue que $\int_0^1 \operatorname{sen}[1/(1-x)]\,dx$ existe, pues el integrando es acotado en $[0, 1)$ y, además, es integrable en $[0, b]$ para cada $0 < b < 1$, por ser continuo en cada uno de esos intervalos.

En los cuatro resultados siguientes se supondrá que f y g son funciones definidas en $[a, \infty)$, e integrables en $[a, b]$ para cada $b > a$.

PROPOSICION 9.4 Supóngase que f es no negativa, y defínase $y_n = \int_a^n f(x)\,dx$ para cada número natural $n \geqslant a$. Entonces, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente si, y sólo si, (y_n) está acotada superiormente. En cualquiera de los dos casos, $\int_a^\infty f(x)\,dx = \alpha$, donde $\alpha = \sup\{y_n \mid n \geqslant a\}$.

Demostración

Si $b \geqslant c \geqslant a$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^c f(x)\,dx,$$

pues

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

y la integral $\int_c^b f(x)\,dx \geqslant 0$. Así, $y_n \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$ si $a \leqslant n \leqslant b$ e $y_n \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$ si $n \geqslant b$.

De estas dos desigualdades y de la definición del supremo de un conjunto, se sigue con facilidad que si (y_n) está acotada superiormente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx = \alpha$.

A la inversa, supóngase que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente. Entonces, existe $N > 0$ (es posible suponer $N > a$) tal que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^\infty f(x)\,dx\right| < 1 \quad \text{si} \quad b \geqslant N,$$

de donde

$$y_n = \int_a^n f(x)\,dx < 1 + \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{si} \quad n \geqslant N$$

y, por tanto, (y_n) está acotada superiormente. Por la primera parte de la demostración, se tiene que, en este caso, también $\int_a^\infty f(x)\,dx = \alpha$.

COROLARIO 9.4 Supóngase que f es no negativa. Entonces, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$ para todo $b > a$.

La demostración se deja como ejercicio.

COROLARIO 9.5 *(Criterio de comparación)* Supóngase que f y g son no negativas y $f(x) \leqslant g(x)$ en $[a, \infty)$. Entonces:

1) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.
2) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

Demostración

1) Por la monotonía de la integral, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{para todo } b > a$$

Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, entonces, por el corolario anterior, existe $M > 0$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant M \qquad \text{para todo } b > a$$

y, por el mismo corolario, se concluye que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

El inciso 2) se sigue inmediatamente de 1).

COROLARIO 9.6 Si $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

Demostración

$0 \leqslant |f(x)| - f(x) \leqslant 2|f(x)|$ para todo $x \in [a, \infty)$, puesto que $f(x) \leqslant |f(x)|$ y $-f(x) \leqslant |f(x)|$. Por esas desigualdades y el corolario 9.5, resulta que $\int_a^\infty (|f(x)| - f(x))\,dx$ es convergente.

Por otra parte,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx - \int_a^b (|f(x)| - f(x))\,dx \qquad \text{para todo } b > a$$

Por consiguiente,

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existe y vale, además,

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx - \int_a^\infty (|f(x)| - f(x))\,dx$$

EJEMPLO

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x^3}{x^2}\,dx$ es convergente.

En efecto, $|\cos x^3/x^2| < 1/x^2$ para todo $x \geqslant 1$ y la integral $\int_1^\infty dx/x^2$ es convergente. Por el corolario 9.5, se tiene que $\int_1^\infty |\cos x^3/x^2|\,dx$ es convergente y, por tanto, también lo es $\int_1^\infty (\cos x^3/x^2)\,dx$ (Corolario 9.6).

Para los demás tipos de integrales impropias pueden establecerse afirmacio-

nes similares a las de la proposición 9.4 y los corolarios que le siguen. Por ejemplo:

PROPOSICION 9.5 Sea f una función no negativa definida en $[a, b]$, excepto, quizás, en b, y supóngase que f no es acotada en $[a, b)$. Sea (x_n) una sucesión en $[a, b)$, creciente y convergente a b. Defínase $y_n = \int_a^{x_n} f(x)\,dx$ para cada $n \geqslant 1$. Entonces, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si, y sólo si, la sucesión (y_n) está acotada superiormente.

CRITERIO DE LA INTEGRAL PARA LAS SERIES

Mediante la integral impropia de la primera clase se dará un criterio para determinar la convergencia o divergencia de ciertas series de términos positivos.

TEOREMA *(Criterio de la integral para las series)* Sea $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función *no negativa* y *decreciente*. Para cada número natural k, defínase $x_k = f(k)$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge si, y sólo si, $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente.

Demostración

La integral $\int_b^c f(x)\,dx$ existe si $c > b \geqslant 1$, ya que f es decreciente en $[b, c]$ (Ejercicio 9.3).

Para cada número natural n, sean $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ e $y_n = \int_1^n f(x)\,dx$. Dado que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es una serie de términos no negativos y por la proposición 9.4, para demostrar el teorema, es suficiente probar que la sucesión (s_n) está acotada superiormente si, y sólo si, la sucesión (y_n) está acotada superiormente.

Sea k un número natural mayor que 1. Si $k - 1 \leqslant x \leqslant k$, entonces $f(k) \leqslant \leqslant f(x) \leqslant f(k-1)$, ya que f es decreciente. Por la monotonía de la integral se tiene $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant f(k-1)$. De donde, si $n \geqslant 2$, entonces

$$\begin{array}{ccccc} f(2) & \leqslant & \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx & \leqslant & f(1) \\ f(3) & \leqslant & \displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx & \leqslant & f(2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f(n) & \leqslant & \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx & \leqslant & f(n-1) \end{array}$$

Al sumar miembro a miembro estas desigualdades, se obtiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - x_1 \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} x_k$$

Es decir, $S_n - x_1 \leqslant y_n \leqslant S_{n-1}$ si $n \geqslant 2$. Por consiguiente, (s_n) está acotada superiormente si, y sólo si, (y_n) está acotada superiormente.

EJEMPLO Analícese la convergencia o divergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ para los diferentes valores de p.

Si $p \leqslant 0$, entonces es claro que la serie diverge a ∞.

Supóngase que $p > 0$, y defínase $f(x) = 1/x^p$. Entonces, f es positiva y decreciente en $[1, \infty)$. Por el teorema anterior, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ converge si, y sólo si, $\int_1^{\infty} dx/x^p$ es convergente.

Para cada $b > 1$, se tiene

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{b^{p-1}} - 1\right) & \text{si} \quad p \neq 1 \\ \log(b) & \text{si} \quad p = 1 \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-p} & \text{si} \quad p > 1 \\ \infty & \text{si} \quad p \leqslant 1 \end{cases}$$

De donde $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ converge si, y sólo si, $p > 1$.

Nota Si en el enunciado del teorema anterior se sustituye 1 por un número natural n_0, se obtiene entonces un teorema también verdadero. Por consiguiente, el criterio de la integral podrá aplicarse a algunas series del tipo $\sum_{k=n_0}^{\infty} x_k$.

EJERCICIOS

9.1 a) Calcúlese $\int_0^2 x^2\,dx$ tomando la sucesión de particiones

$$P_n = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, \frac{2n}{n} = 2\right\} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{y} \quad \xi_i = \frac{2(i-1)}{n}$$

como punto intermedio en los subintervalos $[2(i-1)/n, 2i/n]$ de la partición P_n. [*Sugerencia:* $2 + 4 + \cdots + 2(n-1) = (n-1)n, n > 1$.]

b) Calcúlese $\int_0^b x^3\,dx$ tomando la sucesión de particiones

$$P_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{nb}{n} = b\right\}; \; n = 1, 2, \dots \quad \text{y} \quad \xi_i = \frac{ib}{n}; \; i = 1, \dots, n$$

y usando el resultado $(1 + 2^3 + \cdots + n^3) = n^2(n+1)^2/4$.

c) En forma análoga, calcúlese $\int_{-b}^0 x^3\,dx$, donde $b > 0$.

9.2 Escríbanse las sumas superior e inferior para cada una de la funciones siguientes

en el intervalo indicado. Utilícese una partición de manera que cada subintervalo tenga igual longitud $1/n$; $n = 1, 2, 3$.

a) $f(x) = x^3$ en $[1, 3]$
b) $f(x) = 1/x$ en $[3, 5]$
c) $f(x) = \sqrt{x}$ en $[2, 5]$
d) $f(x) = x^2$ en $[0, 4]$

9.3 Demuéstrese que una función creciente o decreciente en un intervalo cerrado es integrable. [*Sugerencia:* Usese el Teorema 9.4.]

9.4 Pruébese que la función $f(x) = [x]$ es integrable en cualquier intervalo cerrado.

9.5 Dése una acotación de la forma

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a),$$

donde m y M son los valores mínimo y máximo que alcanza f en los intervalos indicados en los apartados siguientes:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$
b) $f(x) = \operatorname{sen} 2x \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$
c) $f(x) = \cos 3x \qquad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$
d) $f(x) = x^4 \qquad -4 \leqslant x \leqslant 4$
e) $f(x) = \tan x \qquad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$

9.6 Sean f y f' continuas en $[a, b]$ y supóngase que $|f'(x)| \leqslant M$ en $[a, b]$. Usando el teorema del valor medio para derivadas, demuéstrese que para cualquier partición P de $[a, b]$, se tiene

$$U(P; f) - L(P; f) \leqslant M(b - a)\Delta P$$

Con este resultado, pruébese que una función con derivada continua es integrable. Obsérvese que el teorema 9.2 implica este resultado.

9.7 Supóngase que f es integrable en $[-b, b]$; si f es una función par, pruébese que $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$, y que si f es impar, entonces $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$. [*Sugerencia:* Interprétese gráficamente.]

9.8 Calcúlense las integrales definidas siguientes:

a) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 (x^2 + 3x - 1)\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + 2\cos x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_3^{-1} 2\,dx$ f) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 8} e^{2x}\,dx$ h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

9.9 a) Verifíquese que la derivada de $\dfrac{2}{2-\beta}\operatorname{ang\,sen} x^{(2-\beta)/2}$ es igual a $1/\sqrt{x^\beta - x^2}$. Encuéntrese $\int_a^b dx/\sqrt{x^\beta - x^2}$, donde $0 < a < b < 1$.

b) Calcúlese

$$\int_0^2 \frac{d^4}{dx^4}(x^2 + 2x)\,dx$$

c) Calcúlese

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\sqrt{x^3 + 1}\,dx$$

d) Calcúlese

$$\int_1^2 \frac{d}{dx}(\sqrt{3x^2 - 1})\,dx$$

9.10 Calcúlense:

a) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_1^t x^3\,dx$

b) $d/dt \int_1^t dx/x$ del resultado obtenido, obsérvese que pudo haberse definido $\log t = \int_1^t dx/x$ si en su oportunidad se hubiera conocido el concepto de integral aunque, implícitamente, se utilizó.

c) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_t^2 \sqrt{x^2 + 1}\,dx$

d) $\dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_0^{t^2} \sqrt{x^4 + 1}\,dx$

e) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{t^3} \cos x\,dx$

f) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-t}^t \sqrt{(x^2 + 2)}\,dx$

g) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-t}^t \sqrt{(x^2 + 2)}\,dx$

h) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t^2}^{t^3+1} \sqrt{x^2 + 1}\,dx$

9.11 Demuéstrese que si $f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$$

9.12 Calcúlese

$$\int_{-2}^2 -|x|\,dx$$

9.13 En los apartados siguientes, dígase si las integrales en cuestión son impropias y por qué. Indíquese, en cada caso, si convergen o divergen y, si algunas convergen, calcúlese su valor.

a) $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^8 - x^2}}$

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x}}$

9.14 Sea $f:(-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo cerrado con extremos finitos. Pruébese que si $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ y $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ son convergentes, entonces $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ también lo son para todo $a \in \mathbb{R}$ y, además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

9.15 Sea f como en el ejercicio anterior y supóngase que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. Pruébese que

$$\lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

9.16 Pruébese que las propiedades aditiva y homogénea válidas para la integral definida, también lo son para las integrales impropias convergentes.

9.17 Sea $p \neq 1$. Pruébese que la función $F(x) = \dfrac{1}{1-p}(\log x)^{1-p}$ es una primitiva de $1/(x \log^p x)$ en $(1, \infty)$. Pruébese también que la función $G(x) = \log(\log x)$ es primitiva de $1/(x \log x)$ en $(1, \infty)$.

9.18 Determínese para qué valores de p es convergente la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^p k}$$

George Berkeley
(1685 a 1753)

Filósofo, economista, matemático, físico y obispo, se le puede considerar como uno de los precursores del cálculo por su contribución a esta rama de la matemática al criticar la falta de formalidad con que se manejaban los nuevos conceptos. La necesidad de fundamentar correctamente las respuestas a las críticas de Berkeley dio paso a la creación del análisis matemático en el que se formalizan todos los conceptos del cálculo.

Cuestiones religiosas fueron las razones de fondo para que Berkeley formulara su crítica a Newton. En su publicación De motu, *1729, rechazó los conceptos que Newton había vertido sobre espacio absoluto, tiempo y movimiento; por este trabajo se le dio recientemente el título de «Precursor de Mach y de Einstein».*

En 1734 publicó la crítica que incluía algunos de los nuevos conceptos del cálculo, con el título de El analista *o* Un discurso dirigido a un matemático infiel *(el «infiel» era Edmund Halley), calificada por Florían Cajori, historiador de las matemáticas, como «el hecho más espectacular del siglo en la historia de las matemáticas británicas».*

Después de su crítica, salieron en defensa de Newton, entre otros, James Jurin, de Cambridge; John Walton, de Dublín, y Colin Maclaurin, de Escocia. Berkeley respondió a Jurin con una punzante sátira en Una defensa del libre pensamiento en matemáticas *(1735); en un apéndice del mismo trabajo le contestó a Walton y lo hace de nuevo en* Razones para no contestar... *(1735).*

En forma paralela a la vida de Berkeley se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Montesquieu: *Cartas persas*, 1721.
Prévost: *Manón Lescaut*, 1731.
Swift: *Viajes de Gulliver*, 1726.
Voltaire: *Saïre*, 1738.

MUSICA

Bach, J. S.: *Concierto de Brandenburgo*, 1721; *La pasión según San Juan*, 1723; *La Pasión según San Mateo*, 1729; *Misa en Si*, 1738; *El arte de la fuga*, 1747.

Haendel: *Música acuática*, 1717; *Julio César*, 1724; *Concerti grossi*, 1734; *Israel en Egipto*, 1739; *El Mesías*, 1742; *Música de los fuegos fatuos*, 1747.

Scarlatti: *Il trionfo dell'onore*, 1718.

PINTURA

Boucher: *Triunfo de Venus*, 1740; *Diana saliendo del baño*, 1742.

Canaletto: *Escena en Venecia*, 1728.

Tiépolo: *Historia de Cleopatra y Marco Antonio*, 1746.

Watteau: *Los placeres del baile; El embarque para Citerea*, 1717.

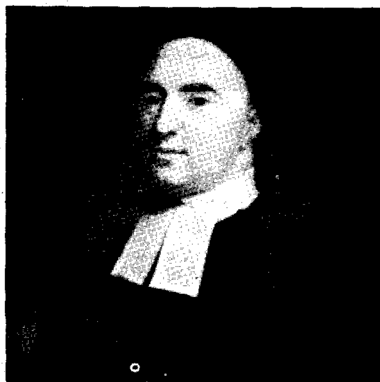
CULTURA EN GENERAL

Buffon: *Historia natural*, 1749.

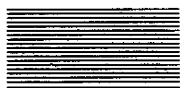
Diderot: *Pensamientos filosóficos*, 1746.

Hume, D.: *Tratado sobre la naturaleza humana*, 1741; *El entendimiento humano*, 1748.

Descubrimiento de Pompeya, 1748.



George Berkeley



10 METODOS DE INTEGRACION

INTEGRALES INMEDIATAS

En matemáticas resulta de gran importancia desarrollar métodos para evaluar integrales, pues, en general, no es posible aplicar uno que conduzca con seguridad a un resultado. Sin embargo, los presentados en este capítulo pueden considerarse simples mecanizaciones para hallar primitivas de funciones, mismas que permiten, a través del segundo teorema fundamental del cálculo, evaluar ciertas integrales definidas.

En la sección sobre primitivas (Cap. 5) se elaboró una tabla de funciones primitivas de ciertas funciones.

Se denota a una primitiva de f por $\int f(x)\,dx$. Así, las definiciones 1 y 2 de la sección mencionada se reducen a escribir

$$\int f+g=\int f+\int g \quad \text{y} \quad \int cf=c\int f$$

La tabla de la sección sobre primitivas se escribe, entonces, con algunos agregados, como

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+k, \qquad \int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k,$$

con n entero y distinto de -1.

Para $n=-1$, tenemos

$$\int x^{-1}\,dx=\log|x|+k, \qquad \int cx^n\,dx=\frac{c}{n+1}x^{n+1}+k,$$

con n entero y distinto de -1.

$$\int (mx^n+b)\,dx=\frac{m}{n+1}x^{n+1}+bx+k,$$

con n entero y distinto de -1.

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + k,$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k,$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{ang} \tan x + k,$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + k,$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + k,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{x}{a} + k,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^\beta - x^2}} = \frac{2}{2 - \beta} \operatorname{ang} \operatorname{sen} x^{(2-\beta)/2} + k, \qquad \beta < 2;\ 0 < x < 1,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2(x^2 - 1)}} = \operatorname{ang} \sec x + k,$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + k,$$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + k,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + k,$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + k,$$

$$\int a^x\, dx = \frac{1}{\log a} a^x + k, \qquad a \neq 0,\ a \neq 1,$$

$$\int e^x\, dx = e^x + k$$

INTEGRACION POR PARTES

Recuérdese que la derivada de un producto de dos funciones se evaluó así:

$$(u \cdot v)'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x);$$

de donde

$$u(x)v'(x) = (u \cdot v)'(x) - v(x)u'(x) \qquad [10.1]$$

Si se deriva

$$u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx,$$

se obtiene el miembro derecho de [10.1]. Así,

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Si se escribe

$$dv(x) = v'(x)\,dx \quad \text{y} \quad du(x) = u'(x)\,dx,$$

tenemos

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x)$$

Para simplificar la notación, simplemente se escribe

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para el caso de integración definida, si a y b son puntos de un intervalo donde vale la fórmula [10.1], entonces

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad [10.2]$$

En la práctica, generalmente se trata de calcular la integral de una función f. El método que se analiza será útil si f puede escribirse como un producto del tipo $u(x)v'(x)$ y si es más sencillo calcular la integral de vu' que la del primer producto.

EJEMPLOS

1. Calcúlese $\int xe^x\,dx$.

   Solución Hágase $u = x$, por lo que $du = dx$ y $dv = e^x\,dx$, de este modo, $v = e^x$.

   Al aplicar la fórmula [10.2] se tiene

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + k$$

   Por último,

$$\int xe^x\,dx = e^x(x-1) + k$$

2. Calcúlese $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$.
Solución Hágase $u = x^2$, por lo que $du = 2x\, dx$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, de este modo, $v = -\cos x$.
Así,

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx \qquad [10.3]$$

Procedemos a calcular la integral que aparece en el miembro derecho de la igualdad, por lo cual hacemos

$$w = x, \quad \text{por tanto,} \quad dw = dx$$
$$dz = \cos x\, dx, \quad \text{por tanto,} \quad z = \operatorname{sen} x$$

Así,

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Por lo que al sustituir en [10.3], se tiene

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) + k$$

Se recomienda verificar el resultado derivándolo y viendo que efectivamente se tiene que tal derivada es igual a $x^2 \operatorname{sen} x$.

3. Calcúlese $\int \log x\, dx$, donde $x > 0$.
Solución Hágase

$$u = \log x, \quad \text{por tanto,} \quad du = dx/x,$$
$$dv = 1 \cdot dx, \quad \text{por tanto,} \quad v = x$$

Con lo que

$$\int \log x\, dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + k,$$

o sea,

$$\int \log x\, dx = x(\log x - 1) + k$$

Ejercicios Calcúlense las integrales

(a) $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ (b) $\int \log x^2\, dx$ (c) $\int x^n \log x\, dx$

(d) $\int \tan^2 x\, dx$ (e) $\int xe^{-x}\, dx$ (f) $\int \log(x^2 + 1)\, dx$

(g) $\int x \cos^2 x \, dx$ (h) $\int \log(1 - x)\, dx$ (i) $\int (\log x)^2 \, dx$

(j) $\int \text{ang tan}\, x \, dx$ (k) $\int \sec^3 x \, dx$ (l) $\int \text{sen}(\log x)\, dx$

(m) $\int x^{1/2} \log x \, dx$ (n) $\int x^4 e^{2x} \, dx$ (o) $\int (\log(x + 1))^2 \, dx$

(p) $\int x \,\text{ang tan}\, x \, dx$ (q) $\int \cos(\log x)\, dx$ (r) $\int x \,\text{ang sen}\, x \, dx$

(s) $\int x \,\text{ang cos}\, x \, dx$ (t) $\int \log(a^2 + x^2)\, dx$ (u) $\int e^{3x} x^3 \, dx$

A continuación se estudia una aplicación importante del método de integración por partes.

FORMULA DE TAYLOR CON RESIDUO EN FORMA DE INTEGRAL

En el capítulo 6 sobre derivación de funciones se estudió cómo puede aproximarse a ciertas funciones mediante un polinomio conocido como polinomio de Taylor. Usando la notación empleada en ese capítulo, se calculará la diferencia

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

en términos de una integral.

Esto es importante porque $f(x)$, la función original, queda expresada de la manera siguiente, ya conocida,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

pero ahora podremos escribir $R_n(x)$ en forma de una integral mediante la cual podrá encontrarse con más facilidad, en ciertos casos, un número M tal que $|R_n(x)| < M$ para todo x en una vecindad del punto a alrededor del cual se toma el polinomio de Taylor.

TEOREMA 10.1 Sea f tal que tiene $n + 1$ derivadas continuas en la vecindad $V(a)$ de radio $r > 0$. Entonces, para cada $x \in V(a)$, se tiene

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x),$$

donde,

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Demostración

Supóngase que $a < x < a + r$. Por el teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \qquad [10.4]$$

Si se hace

$$u(t) = f'(t),$$
$$u'(t) = f''(t),$$
$$v(t) = -(x - t),$$
$$v'(t) = 1$$

y se integra por partes la integral que aparece en [10.4], se obtiene

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t)f''(t)\,dt$$

De nuevo, si en la última integral se hace

$$u(t) = f''(t),$$
$$u'(t) = f'''(t),$$
$$v'(t) = (x - t),$$
$$v(t) = -(x - t)^2/2$$

y se integra por partes, obtenemos, al sustituir en [10.4],

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t)\,dt$$

Al repetir este proceso n veces se obtiene la expresión requerida para f en el teorema.

El desarrollo que aparece en el teorema demostrado se denomina *fórmula de Taylor* para f, donde el residuo se ha expresado en forma de una integral.

En seguida encontramos una cota para el residuo R_n que, como se observará, coincide con la obtenida al usar la forma de Lagrange estudiada en capítulos anteriores.

TEOREMA 10.2 Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para todo $x \in V(a)$ de radio $r > 0$, entonces

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Demostración
Supóngase para variar que $x < a$, entonces

$$|R_n(x)| = \left| -\int_x^a \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right| \leqslant \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} M\,dt,$$

y esta última integral da

$$M\left(\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right)\Bigg|_x^a = \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Fórmulas de Taylor para seno y coseno

Para cada número natural n el desarrollo de la función sen alrededor de 0 es el siguiente:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen}'(0)x + \operatorname{sen}''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \operatorname{sen}^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + R_n$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots + R_n,$$

donde

$$R_n = \int_0^x \operatorname{sen}^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

Pero como

$$\operatorname{sen}^{(m)}(t) = \begin{cases} \pm\operatorname{sen} t \\ \pm\cos t, \end{cases}$$

en todos los casos tenemos

$$|\operatorname{sen}^{(m)}(t)| \leqslant 1;$$

así,

$$|R_n| \leqslant \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,dt = \frac{|x-t|^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_0^x = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

En forma análoga, al desarrollar la función cos alrededor de $\pi/2$, se tiene

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} + \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos''\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \cdots + $$
$$+ \cos^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-\pi/2)^n}{n!} + R_n(x),$$

o sea,

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots + (-1)^{m+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\,\frac{(x-\pi/2)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots + R_n;$$

así pues,

$$\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-\pi/2)^3}{3!} - \frac{(x-\pi/2)^5}{5!} + \cdots +$$
$$+ (-1)^{m+1}\frac{(x-\pi/2)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots + R_n,$$

donde

$$R_n = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt;$$

de nuevo, se tiene

$$|R_n| \leqslant \frac{|x-\pi/2|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Por lo anterior, los desarrollos en fórmula de Taylor para la función sen alrededor de 0 y de la función cos alrededor de $\pi/2$ son semejantes. Así mismo, es fácil comprobar que para $a = 0$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots + R_n,$$

donde

$$R_n = \int_0^x \cos^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt,$$

y, de nuevo,

$$|R_n| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$$

Desarrollo de la función log

A partir del desarrollo de la función $1/(1 + x)$ (véase pág. 220), podemos desarrollar la función log en fórmula de Taylor.

TEOREMA 10.3 Sea $0 \leqslant x < 1$; entonces

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n,$$

donde

$$R_n = \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1 + t}\,dt$$

Demostración
Para cada número natural n,

$$\log(1 + x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t}\,dt = \int_0^x \left[1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1 + t}\right]dt,$$

de donde

$$\log(1 + x) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}\bigg|_0^x + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1 + t}\,dt$$

Al evaluar para 0 y para x, se obtiene el resultado.
Obsérvese que si $0 \leqslant t$, entonces

$$\frac{t^n}{1 + t} \leqslant t^n;$$

por tanto,

$$|R_n| = \left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1 + t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n + 1}$$

La última desigualdad implica que R_{n+1} es muy pequeño para n grande y $0 < x < 1$, por lo cual,

$$\log(1 + x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n}$$

TEOREMA 10.4 Sea $0 \leqslant x < 1$, entonces

$$\log(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\,dt$$

Demostración
Esto se sigue de que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + \frac{x^n}{1-x}$$

y que

$$\log(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$$

Con objeto de acotar a

$$\left|-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right|$$

se supone que $0 < x < 1$ y, por tanto,

$$0 \leqslant t^n \leqslant x^n < 1,$$

y

$$1 - t \geqslant 1 - x$$

para

$$0 \leqslant t \leqslant x$$

Así, se tiene que

$$|R_n| = \left|-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt$$

y

$$|R_n| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)},$$

por lo que para n grande y $0 < x < 1$,

$$\log(1-x) \cong -\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right)$$

EJEMPLO
Calcúlese $\log\frac{1}{2}$ con dos cifras de aproximación.

Solución Si se toma $n = 8$ en el desarrollo que aparece en el enunciado del teorema 10.4, se tiene

$$\log(\tfrac{1}{2}) = \log(1 - \tfrac{1}{2}) \cong -\left(\frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + \cdots + \frac{(\frac{1}{2})^8}{8}\right) + R_9,$$

pero

$$|R_9| \leqslant \frac{(\frac{1}{2})^9}{9\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{9\cdot 2^8} = \frac{1}{2304} \cong 0.0004;$$

por tanto, con la aproximación de dos cifras, tenemos

$$\log\left(\tfrac{1}{2}\right) \cong -\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{160} + \tfrac{1}{384} + \tfrac{1}{896} + \tfrac{1}{2048}\right) \cong -0.69264$$

Desarrollo de la función exponencial

Como $(e^x)^{(n)} = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, además, $e^0 = 1$, si se desarrolla e^x alrededor de 0, obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

donde

$$R_n = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt;$$

dado que e^t es una función creciente, se tiene que, para $x > 0$,

$$e^t \leqslant e^x \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant x,$$

por lo que si $x > 0$, entonces

$$0 \leqslant R_n = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \leqslant \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,dt = e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

EJEMPLO

Si en el desarrollo de e^x se toma $x = 1$ y $n = 9$, entonces se tiene que

$$|R_9| \leqslant e^1 \frac{1}{10!} < \frac{3 \cdot 1}{10!} = \frac{1}{1\,209\,600} = 0.0000008$$

Se ha supuesto que $e^1 < 3$ (véase Cap. 7); por tanto,

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 2.7182812$$

resulta ser una aproximación de e con seis cifras decimales de exactitud.

Desarrollo de la función ang tan

Considérese la integral definida correspondiente a ang tan; es decir,

$$\operatorname{ang\,tan} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Debido al desarrollo de $1/(1 + t^2)$ que aparece en el ejercicio 1 de esta sección, tenemos que para cada número natural n

$$\text{ang tan } x = \int_0^x \left(1 - t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2(n-1)} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1 + t^2}\right) dt,$$

por lo que

$$\text{ang tan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} + R_{2n};$$

donde

$$R_{2n} = (-1)^n \int_0^{x} \frac{t^{2n}}{1 + t^2} dt$$

Debido a que

$$t^{2n} \geqslant 0 \quad \text{y} \quad 1 + t^2 > 1,$$

se tiene

$$0 \leqslant \frac{t^{2n}}{1 + t^2} \leqslant t^{2n} \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}$$

Por tanto,

$$0 \leqslant |R_{2n}| \leqslant \left| \int_0^x t^{2n}\, dt \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{2n + 1}$$

Ejercicios

1. Verifíquense los desarrollos siguientes en la fórmula de Taylor:

(a) $$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} + R_{2n-1},$$

donde

$$R_{2n-1} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1 + x^2}$$

(b) $$a^x = 1 + (\log a)x + \frac{(\log a)^2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{(\log a)^n x^n}{n!} + R_n,$$

donde

$$R_n = \int_0^x a^t (\log a)^{n+1} \frac{(x - t)^n}{n!} dt, \qquad a > 0$$

2. (a) Demuéstrese la igualdad siguiente, donde $s \in \mathbb{R}$, arbitrario, y x es tal que $-1 < x < 1$.

$$(1 + x)^s = 1 + sx + \frac{s(s - 1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{s(s - 1)\cdots(s - k + 1)}{k!} x^k + R_k,$$

donde R_k es el residuo k.

(b) Demuéstrese la igualdad siguiente, para el caso $a > 0$, $|b|/a < 1$,

$$(a+b)^{1/2} = a^{1/2} + \tfrac{1}{2}a^{-1/2}b - \tfrac{1}{4}a^{-3/2}\frac{b^2}{2!} + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{3}{2})a^{-5/2}\frac{b^3}{3!} +$$

$$+ \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))a^{1/2}}{n!}\frac{b^n}{a^n} + R_n$$

[*Sugerencia:* $(a+b)^{1/2} = a^{1/2}(1+(b/a))^{1/2}$, si $a > 0$.]

3. Demuéstrese que para cada número natural n,

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}x^k + \cdots + x^n$$

4. Calcúlense los números siguientes con cuatro cifras de aproximación.
(a) $\sqrt{26}$ (b) $\sqrt{50}$ (c) $\sqrt{257}$ (d) $(7.2)^4$
(e) $(6.3)^3$ (f) $\sqrt{30}$ (g) $\sqrt{90}$

5. Determínense los números siguientes con tres cifras de aproximación.
(a) sen 31° (b) cos 29° (c) cos 61°
(d) cos 46° (e) sen 61°
[*Sugerencia:* Transfórmense grados a radianes; por ejemplo, $31° = (\pi/6 + \pi/180)$ radianes $\simeq (\pi/6 + 0.0017)$ radianes.]

6. Encuéntrense los logaritmos naturales con tres cifras de aproximación de las cantidades siguientes.
(a) 1.5 (b) 1.4 (c) $\sqrt{2}$ (d) $1/\sqrt{2}$
(e) 0.7 (f) 1.6 (g) $(\sqrt{2})^3$ (h) $\sqrt{1/3}$

7. Evalúense los exponenciales siguientes con cuatro cifras de aproximación:
(a) $e^{1/3}$ (b) e^2 (c) $\sqrt{e}$ (d) $1/\sqrt{e}$ (e) $e^{2/3}$ (f) e^3

8. Calcúlense cinco cifras del número π mediante la fórmula

$$\pi = 4(\text{ang tan}\,\tfrac{1}{2} + \text{ang tan}\,\tfrac{1}{3})$$

INTEGRACION POR SUSTITUCION O CAMBIO DE VARIABLE

Esta técnica tiene dos modalidades:

Sustitución directa Supóngase que se desea encontrar $\int g(h(x))h'(x)\,dx$, donde g es continua y h una función cuya derivada h' también es continua. Se escribe $u = h(x)$ [por lo que $du/dx = h'(x)$] y $du = h'(x)\,dx$. (¡Lo que simbólicamente equivale a despejar a du en el paréntesis anterior!)

Atendiendo sólo a los símbolos, esas sustituciones nos llevan a escribir

$$\int g(h(x))h'(x)\,dx = \int g(u)\,du = G(u) + k = G(h(x)) + k,$$

donde $G(u)$ *es una primitiva* de $g(u)$.

La regla de la cadena permite probar que el *resultado obtenido es correcto.* En efecto, por dicha regla se tiene

$$(G(h(x)))' = G'(h(x))h'(x)$$

y como

$$G'(h(x)) = g(h(x)),$$

entonces se concluye que

$$(G(h(x)))' = g(h(x))h'(x)$$

Es decir,

$$\int g(h(x))h'(x)\,dx = G(h(x)) + k$$

EJEMPLOS

1. Hállese $\int (\text{sen } x)^2 \cos x\,dx$.

   Escríbase $u = \text{sen } x$ y $du = (\text{sen } x)'\,dx = \cos x\,dx$. De acuerdo a lo anterior, tenemos

$$\int (\text{sen } x)^2 \cos x\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + k = \frac{(\text{sen } x)^3}{3} + k$$

   (en este caso, $g(u) = u^2$).

2. Hállese $\int (\log x/x)\,dx$.

   Escríbase

$$u = \log x \quad \text{y} \quad du = (\log x)' = (1/x)\,dx$$

   Así,

$$\int \frac{\log x}{dx}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + k = \frac{(\log x)^2}{2} + k$$

El éxito alcanzado al aplicar este método a una integral $\int f(x)\,dx$ depende de la habilidad que se tenga para reconocer al integrando f como un producto de la forma $g(h(x))h'(x)$, siendo g una función para la que es más sencillo integrar $\int g(u)\,du$ que $\int f(x)\,dx$. Dicha habilidad se desarrolla con la práctica.

En algunas ocasiones, mediante pequeñas modificaciones al integrando de $\int f(x)\,dx$, se consigue otra integral para la que es aplicable el método, y en términos de esta última se expresa $\int f(x)\,dx$.

3. Hállese $\int \operatorname{sen} 3x\, dx$.

Escríbase $u = 3x$ y $du = (3x)'\, dx = 3\, dx$. Entonces,

$$\int \operatorname{sen} u\, du = \int (\operatorname{sen} 3x)3\, dx,$$

que no es la integral que se desea; pero es claro que

$$\int \operatorname{sen} 3x\, dx = \int \tfrac{3}{3} \operatorname{sen} 3x\, dx = \tfrac{1}{3} \int \operatorname{sen} u\, du = -\tfrac{1}{3} \cos u + k = -\tfrac{1}{3} \cos 3x + k$$

Es decir, en este caso el integrando se multiplicó y dividió por una constante, obteniéndose una integral que pudo determinarse por una sustitución directa y, con ello, se resolvió finalmente el problema inicial. El mismo resultado se logra mediante el manejo simbólico siguiente.

Hagamos

$$u = 3x \quad \text{y} \quad du = 3dx;$$

por tanto,

$$\frac{du}{3} = dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{sen} 3x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} u}{3}\, du = -\tfrac{1}{3} \cos u + k = -\tfrac{1}{3} \cos 3x + k$$

4. Hállese $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$.

Hagamos

$$u = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad du = 2x\, dx;$$

por tanto,

$$\frac{du}{2} = x\, dx \quad \text{y} \quad \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{du}{2u} = \tfrac{1}{2} \log u + k = \tfrac{1}{2} \log (x^2 + 1) + k$$

Sustitución inversa Supóngase que desea hallarse $\int f(x)\, dx$, donde f es continua. En esta modalidad de la sustitución se busca una función $h(y)$ cuya derivada sea continua y no se anule y, además, que la integral $\int f(h(y))h'(y)\, dy$ sea más sencilla de determinar que $\int f(x)\, dx$. En otras palabras, ahora se escribe $x = h(y)$ y $dx = h'(y)\, dy$, lo cual nos lleva a

$$\int f(x)\, dx = \int f(h(y))h'(y)\, dy = H(y) + k = H(h^{-1}(x)) + k,$$

donde $H(y)$ es una primitiva de $f(h(y))h'(y)$.

De nuevo, la regla de la cadena permite probar que el *resultado obtenido es correcto*, pues

$$(H(h^{-1}(x)))' = H'(h^{-1}(x))(h^{-1}(x))' = H(y)\frac{1}{h'(y)},$$

donde $y = h^{-1}(x)$. Y como

$$H'(y) = f(h(y))h'(y),$$

entonces

$$(H(h^{-1}(x)))' = f(h(y)) = f(x)$$

Se dará un solo ejemplo, pues más adelante se exponen otros métodos que son simplemente sustituciones inversas particulares que ejemplifican la gran utilidad de esta técnica (véase sustituciones trigonométricas).

EJEMPLO

1. Hállese $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$.
Obsérvese que, si no aparece el radical, la integral se simplifica. Esto sugiere la sustitución $x = y^3 + 4$, $dx = 3y^2\,dy$. Así,

$$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \int (y^3+4)y(3y^2)\,dy = 3\int y^6 + 4y^3\,dy =$$

$$= 3\left(\frac{y^7}{7} + y^4\right) + k = 3\left(\frac{(x-4)^{7/3}}{7} + (x-4)^{4/3}\right) + k$$

Ejercicios Calcúlense

(a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

(b) $\displaystyle\int e^{ax}\,dx$ (donde a es constante)

(c) $\displaystyle\int \frac{\log x\,dx}{x}$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 3x}$

(e) $\displaystyle\int \tan 2x\,dx$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\,dx$ (donde a es constante)

(h) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \tan\theta \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 ax}$ (donde a es constante)

(k) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{dx}{Ax + B}$ (A y B son constantes)

(m) $\displaystyle\int (\text{sen}^3 e^x)(\cos e^x)(e^x)\, dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{8 + x^2}}$

(o) $\displaystyle\int \cos 3x\, dx$

(p) $\displaystyle\int \text{sen}\, 2x \sqrt{1 + 2\cos 2x}\, dx$

INTEGRACION POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

Se desarrollará otro método de integración mediante el uso de las conocidas identidades

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Este método resulta conveniente para ser aplicado en integrales en cuyos integrandos aparecen expresiones de la forma

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2}, \quad \sqrt{u^2 - a^2}$$

Si se sustituye u por a sen θ en la expresión $\sqrt{a^2 - u^2}$, se tendrá

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta} = a\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} = a \cos \theta$$

Si se sustituye u por $a \tan \theta$ en $\sqrt{a^2 + u^2}$, se tendrá

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = a\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = a \sec \theta,$$

y si se sustituye u por $a \sec \theta$ en $\sqrt{u^2 - a^2}$, entonces

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = a\sqrt{\sec^2 \theta - 1} = a \tan \theta$$

EJEMPLOS

1. Calcúlese $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx.$

Solución Sea $x = a \operatorname{sen} \theta$, con lo cual $\theta = \text{ang sen}\,(x/a)$; y así,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

y

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

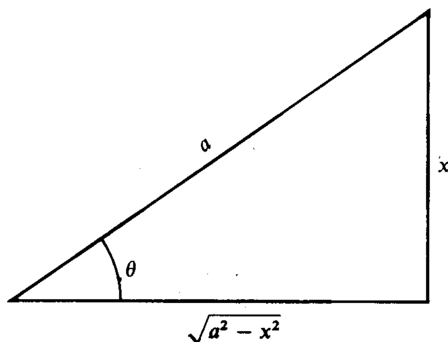
Por tanto,

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}(a \cos \theta)\,d\theta = \int \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}\,d\theta =$$

$$= \int \cot^2 \theta \, d\theta = \int (\csc^2 \theta - 1)\,d\theta = -\int -\csc^2 \theta \, d\theta - \int d\theta = -\cot \theta - \theta + k,$$

pero como, además, $\cot \theta = \sqrt{a^2 - x^2}/x$ (véase figura siguiente) se tiene, por último, que

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \text{ang sen}\,\frac{x}{a} + k$$



2. Calcúlese $\displaystyle\int x\sqrt{a^2 + x^2}\,dx.$

Solución Según lo estudiado anteriormente, hágase $x = a \tan \theta$, con lo que $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$; así,

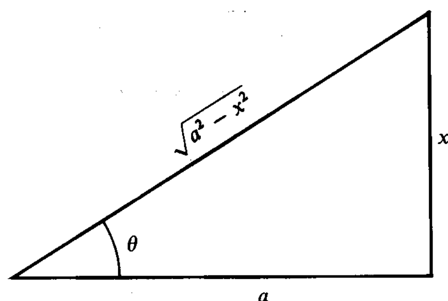
$$\int a \tan \theta \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta}\; a \sec^2 \theta \, d\theta = \int a^3 \tan \theta \sec^3 \theta \, d\theta$$

pero, como $d \sec \theta = \sec \theta \tan \theta \, d\theta$, se tiene

$$\int a^3 \tan \theta \sec^3 \theta \, d\theta = a^3 \int \sec^2 \theta d \sec \theta = a^3 \frac{\sec^3 \theta}{3} + k,$$

y como $\sec\theta = \sqrt{a^2 + x^2}/a$ (véase figura siguiente) se tiene

$$\int x\sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 + k$$



AFECTACION DE LOS LIMITES DE LA INTEGRAL DEFINIDA AL CAMBIAR DE VARIABLE

Si se pide calcular

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \qquad a > 0,$$

se procede a encontrar la primitiva de $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ haciéndolo según los criterios ya estudiados, o sea, cambiamos la variable así:

$$x = a \operatorname{sen} t, \tag{10.5}$$

con lo que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a^2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt$$

Ahora, como se pide calcular la integral definida, se observa que el intervalo $[0, b]$ se transforma mediante [10.5] en $[0, \pi/2]$, por lo que

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = a^2\frac{\pi}{4}$$

Este ejemplo queda generalizado en el teorema siguiente:

TEOREMA 10.5 Sea $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y con derivada continua. Supóngase que f es una función continua en $\operatorname{im} g = [c, d]$. (Recuérdese que si

$g: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\operatorname{im} g$ es un intervalo cerrado.) Entonces,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

El resultado es obvio si g es una función constante. Por tanto, supóngase que no lo es.

Demostración

Sea F una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [c, d]$.

Entonces, por la regla de la cadena, $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)g'(t)$. En efecto,

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero $F(g(b)) - F(g(a))$ es exactamente la integral

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

EJEMPLOS

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx = \int_0^1 u^3 \cdot u'\,du = \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$

   Ya que la función $u = \operatorname{sen} x$ transforma el intervalo $[0, \pi/2]$ en $[0, 1]$.

2. Considérese la integral

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x - 1}}{x}\,dx$$

   y el cambio de variable $x(t) = 1 + t^2$; es decir,

$$x - 1 = t^2$$
$$x'(t) = 2t;$$

   el intervalo $[1, 5]$ viene del intervalo $[0, 2]$ bajo la función $x(t)$; entonces, por el teorema anterior,

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x - 1}}{x}\,dx = \int_0^2 \frac{t}{1 + t^2}\,2t\,dt$$

3. La integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6 - 5\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}$$

puede calcularse fácilmente mediante el cambio de variable

$$\operatorname{sen} \varphi = t$$
$$\cos \varphi \, d\varphi = dt$$

Esta integral se convierte en

$$\int_0^1 \frac{dt}{6 - 5t + t^2},$$

que se resuelve por los métodos de la sección siguiente.

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

En esta sección se supondrá que todos los polinomios aquí considerados tienen coeficientes reales; es decir, si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

entonces $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n$.

Un polinomio $p(x)$ se dice irreducible o primo si sus únicos divisores son el mismo polinomio y los números reales distintos de cero. Puede probarse que los polinomios irreducibles son únicamente los de la forma $ax + b$ o de la forma $ax^2 + bx + c$ cuando su discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo.

Recuérdese que se dice que una función es racional si

$$f(x) = p(x)/q(x),$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Se dice que una función racional $f(x)$ es una fracción parcial si

$$f(x) = \frac{ax + b}{(q(x))^s},$$

donde $q(x)$ es un polinomio irreducible y s es un número entero positivo.

Las funciones siguientes son ejemplos de fracciones parciales:

$$\frac{2}{x - 4}, \quad \frac{5}{(x - 4)^8}, \quad \frac{7 + 2x}{(x^2 + \pi x + 3)^5}$$

Ahora se verá que una función racional se expresa como la suma de un polinomio y algunas fracciones parciales, y también cómo se integran estas fracciones parciales.

Sea $f(x) = p(x)/q(x)$, $q(x) \neq 0$, una función racional. Entonces, se tienen los casos siguientes:

1. Si $q(x)$ divide a $p(x)$, al hacer la división correspondiente se obtiene

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = m(x),$$

donde $m(x)$ es un polinomio tal que $p(x) = q(x)m(x)$. En este caso, $f(x)$ queda expresada como $f(x) = m(x) + 0 = m(x)$.

2. Si $q(x)$ no divide a $p(x)$, pero el grado del denominador $q(x)$ es menor que el grado del numerador $p(x)$, se efectúa entonces la división de $p(x)$ entre $q(x)$, con lo cual se obtiene

$$p(x) = q(x)m(x) + r(x),$$

donde el grado de $q(x)$ es mayor que el de $r(x)$. Así,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = m(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

3. Si el grado de $q(x)$ es mayor que el de $p(x)$, entonces

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = 0 + \frac{p(x)}{q(x)}$$

Así, en los casos 2 y 3 pudimos expresar nuestra función racional $f(x)$ de la manera siguiente:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = m(x) + \frac{r(x)}{s(x)},$$

siendo $m(x)$ un polinomio y $r(x)/s(x)$ una función racional donde el grado de $s(x)$ es mayor que el de $r(x)$.

A continuación se describe un método para expresar la función racional $r(x)/s(x)$, cuyo denominador $s(x)$ tiene grado mayor que el del numerador $r(x)$, como una suma de fracciones parciales. Con esto se habrá logrado la descomposición de $f(x)$ como suma de un polinomio y algunas fracciones parciales.

Considérense las fracciones parciales siguientes:

a) $A/(x - a)^k$, donde a y A son números reales y k un entero positivo.

b) $(Ax + B)/(x^2 + ax + b)^l$, donde A, B, a y b son números reales y l un entero positivo.

En álgebra se prueba que si $r(x)$ y $s(x)$ son polinomios tales que el grado de $s(x)$ es mayor que el de $r(x)$, entonces $r(x)/s(x)$ puede escribirse como una suma $M(x)$ de fracciones parciales de los tipos a) y b). Específicamente, puede probarse que si en $s(x)$ aparece como factor $(x - a)^k$ y si k es la máxima potencia a la cual aparece

elevado $(x - a)$ es $s(x)$, entonces en la suma $M(x)$ aparece como sumando la expresión

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

En forma análoga, si $(x^2 + ax + b)^l$ aparece como factor de $s(x)$ y l es la máxima potencia a la que aparece elevado $(x^2 + ax + b)$, entonces en la suma $M(x)$ aparece como sumando la expresión

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_lx + B_l}{(x^2 + ax + b)^l}$$

Para revisar estos resultados, puede consultarse un libro como *Algebra superior*, de Cárdenas, Lluis, Tomás y Raggi, Editorial Trillas.

EJEMPLOS

1. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx.$

Obsérvese que $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$; o sea,

$$\frac{x^2 + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{x^2 + 2}{(x-1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3}$$

Así,

$$\frac{x^2 + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{A_3 + A_2(x-1) + A_1(x-1)^2}{(x-1)^3};$$

por lo que

$$x^2 - 2 = A_3 + A_2(x - 1) + A_1(x - 1)^2,$$

de donde obtenemos el sistema de ecuaciones

$$A_1 = 1$$
$$A_2 - 2A_1 = 0$$
$$A_3 - A_2 + A_1 = 2$$

Resolviendo este sistema, se obtiene

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = 3,$$

de donde

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^3},$$

y así,

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx = \log|x - 1| - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + k$$

2. Calcúlese la integral $\int \frac{3x-2}{(x^2+1)x}dx$.
En este caso, $x^2 + 1$ es irreducible (su discriminante es negativo; a saber, -4). Así,

$$\frac{3x-2}{(x^2+1)x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

De esta igualdad se sigue que

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ C &= 3 \\ A &= -2 \end{aligned}$$

Si se resuelve este sistema de ecuaciones, se encuentra que

$$\begin{aligned} A &= -2, \\ B &= 2, \\ C &= 3; \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{(x^2+1)x}dx &= -\int \frac{2}{x}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+1}dx = \\ &= -2\log|x| + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= -2\log|x| + \log|x^2+1| + 3\,\text{ang}\tan x \end{aligned}$$

Para evaluar la integral de una fracción parcial, o sea,

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}dx,$$

donde A, B, b y c son números reales y k es un entero positivo, se considera primero la fracción parcial

$$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$$

Al completar cuadrados en el denominador, es posible escribir esta fracción en la forma

$$\frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)\right)^k}$$

Como $x^2 + bx + c$ es irreducible, su discriminante es negativo, por lo que $c^2 - b/4 > 0$. Así,

$$\frac{Ax + B}{\left(\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)\right)^k} = \frac{Ax + B}{\left(\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}\right)^2\right)^k} =$$

$$= \frac{1}{\left(c - \frac{b^2}{4}\right)^k} \cdot \frac{Ax + B}{\left(\left(\frac{x + b/2}{\sqrt{c - b^2/4}}\right)^2 + 1\right)^k}$$

Por tanto, haciendo un cambio de variable adecuado, $u = u(x)$, se obtiene la transformación de integrales siguiente:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k} dx = \int \frac{Cu + D}{(u^2 + 1)^k} du$$

Si $k = 1$, entonces

$$\int \frac{Cu + D}{(u^2 + 1)} du = \frac{C}{2} \int \frac{2u\,du}{(u^2 + 1)} + D \int \frac{du}{(u^2 + 1)} =$$

$$= \frac{C}{2} \log |u^2 + 1| + D \operatorname{ang\,tan} u + C$$

y, al hacerse el cambio de variable inverso, $x = x(u)$, puede resolverse la integral

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} dx$$

Si $k > 1$, entonces

$$\int \frac{Cu + D}{(u^2 + 1)^k} du = \frac{C}{2} \int \frac{2u\,du}{(u^2 + 1)^k} + D \int \frac{du}{(u^2 + 1)^k} =$$

$$= \frac{-C}{2(k - 1)(u^2 + 1)^{k-1}} + D \int \frac{du}{(u^2 + 1)^k}$$

Para resolver la integral

$$\int \frac{du}{(u^2 + 1)^k}$$

se escribe la identidad

$$\int \frac{du}{(u^2 + 1)^k} = \int \frac{du}{(u^2 + 1)^{k-1}} - \int \frac{u^2\,du}{(u^2 + 1)^k} \qquad [10.6]$$

Procedemos a calcular por partes la segunda integral del miembro derecho de la igualdad anterior. Hágase

$$U = u, \quad dU = du; \quad dV = \frac{u\,du}{(u^2+1)^k} \quad \text{y} \quad V = -\frac{1}{(2k-2)(u^2+1)^{k-1}},$$

de donde

$$\int \frac{u^2\,du}{(u^2+1)^k} = -\frac{u}{(2k-2)(u^2+1)^{k-1}} + \int \frac{du}{(2k-2)(u^2+1)^{k-1}}$$

Si hacemos

$$I_k = \int \frac{du}{(u^2+1)^k},$$

entonces podemos escribir la identidad [10.6] en la forma siguiente:

$$I_k = I_{k-1} + \frac{u}{(2k-2)(u^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2k-2} I_{k-1}$$

Así,

$$I_k = \frac{u}{(2k-2)(u^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}$$

Si $k - 1 = 1$, puede calcularse I_{k-1} como se hizo con anterioridad y, por tanto, determinar I_k. Si $k - 1 > 1$, este procedimiento se aplica repetidas veces hasta reducir el grado de $u^2 + 1$ hasta 1. De esta forma, siempre es posible calcular

$$I_k = \int \frac{du}{(u^2+1)^k};$$

por tanto, también es posible calcular

$$\int \frac{Cu + D}{(u^2+1)^k} du$$

De esta manera, si se hace el cambio de variable inverso, $x = x(u)$, también puede calcularse

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k} dx$$

EJEMPLO Resuélvase

$$\int \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx$$

Solución.

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = 3\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+3} \quad \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} \qquad [10.7]$$

Para resolver la segunda integral del miembro derecho de la ecuación [10.7], se completan cuadrados en el denominador de esta integral. Así,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}$$

Si se hace $u = (x+1)/\sqrt{2}$, entonces $du = dx/\sqrt{2}$, por lo que

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dx/\sqrt{2}}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$$

De acuerdo con lo ya estudiado, se sabe que

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} u$$

Por tanto, como $u = (x+1)/\sqrt{2}$, entonces

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{2\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Al combinar este resultado con [10.7], se obtiene

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+3} - \frac{x+1}{2(x^2+2x+5)} -$$

$$- \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{ang\,tan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

DOS METODOS DE EULER

Leonhard Euler (1707-1783), gran matemático suizo, ideó sustituciones que permitían reducir integrales que contienen en sus integrandos el término de la forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$ a integrales de funciones racionales.

Primer método de Euler

Integrales en cuyo integrando aparece algún término de la forma

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \quad \text{donde} \quad a>0$$

Hágase

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t \qquad [10.8]$$

(Considérese tan sólo un signo, cualquiera de los dos, ya que se obtiene el mismo resultado.) Elevando al cuadrado ambos términos de la igualdad, tenemos

$$ax^2+bx+c = (\sqrt{a}x+t)^2,$$

de donde

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}tx + t^2,$$

y así,

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \qquad [10.9]$$

Por tanto, la ecuación [10.8] puede escribirse de la manera siguiente:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t \qquad [10.10]$$

y, así mismo,

$$dx = \frac{2(bt-\sqrt{a}t^2+\sqrt{a}c)}{(b-2\sqrt{a}t)^2}\,dt \qquad [10.11]$$

Obsérvese que las ecuaciones [10.9], [10.10] y [10.11] están ya expresadas como funciones racionales de t, logrando, por tanto, nuestro objetivo.

EJEMPLO Calcúlese

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

Considérese la sustitución

(a) $$\sqrt{x^2 + 3} = x + t, \quad \text{ya que } a = 1$$

(Recuérdese que es indistinto considerar cualquier signo de la raíz $\sqrt{a}$.) Elévense al cuadrado ambos miembros de (a),

$$x^2 + 3 = x^2 + 2xt + t^2,$$

de donde,

(b) $$x = \frac{3 - t^2}{2t}$$

y, por tanto,

$$dx = -\frac{t^2 + 3}{2t^2}\, dt$$

Por lo que, de acuerdo con (a) y (b),

$$\sqrt{x^2 + 3} = x + t = \frac{t^2 + 3}{2t}$$

Así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}} = -\int \frac{(t^2 + 3)2t}{2t^2(t^2 + 3)}\, dt = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + k =$$
$$= -\log|\sqrt{x^2 + 3} - x| + k$$

Segundo método de Euler

Si en el integrando aparece el radical $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ de forma que $ax^2 + bx + c$ tenga como raíces a r_1 y r_2, números reales distintos entre sí, entonces escribimos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r_1)t, \qquad [10.12]$$

y como r_1 y r_2 son raíces de $ax^2 + bx + c$, se tiene que

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - r_1)(x - r_2)},$$

por lo que, considerando la ecuación [10.12],

$$\sqrt{a(x - r_1)(x - r_2)} = (x - r_1)t$$

De aquí,

$$a(x - r_2) = (x - r_1)t^2$$

Así pues,

$$x = \frac{ar_2 - r_1 t^2}{a - t^2} \qquad [10.13]$$

$$dx = \frac{2a(r_2 - r_1)t}{(a - t^2)^2} dt \qquad [10.14]$$

y

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r_1)t = \frac{a(r_2 - r_1)t}{a - t^2}$$

De nuevo, las ecuaciones [10.12], [10.13] y [10.14] están expresadas como funciones racionales de t.

EJEMPLO Calcúlese

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

Aquí $x^2 - 3x + 2$ tiene por raíces a 1 y 2. Por ello, tenemos

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{(x - 1)(x - 2)} = (x - 1)t$$

Al elevar al cuadrado y simplificar,

$$x - 2 = (x - 1)t^2 = xt^2 - t^2$$

Así,

$$x = \frac{2 - t^2}{1 - t^2};$$

$$dx = \frac{2t}{(1 - t^2)} dt$$

y

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \frac{t}{1 - t^2}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \int \frac{2t/(1 - t^2)^2}{t/(1 - t^2)} dt = \int \frac{2\,dt}{1 - t^2} = \log\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + k =$$

$$= \log\left|\frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 1 - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}\right| + k$$

INTEGRALES DE POTENCIAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En la primera sección de este capítulo se dio una tabla de primitivas y se tuvo la oportunidad de evaluar integrales de algunas funciones trigonométricas. En seguida se darán algunos métodos para evaluar integrales de potencias de esas mismas funciones. Por ejemplo, calcúlese

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + k = $$
$$= \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + k,$$

donde se usa la conocida fórmula

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Este método puede emplearse para calcular potencias pares de la función sen, por ejemplo:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = $$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$

En este último integrando debe calcularse $\int \cos^2 x\,dx$ para que el problema quede totalmente resuelto. Por tanto,

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + k$$
$$= \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + k,$$

donde se usó la fórmula

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Y, de paso, se ha encontrado el proceso para determinar la integral de potencias pares de la función cos. Ahora, como ejercicio, se recomienda terminar la evaluación de $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

Usando la fórmula $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, encontramos que

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + k$$

En forma análoga, usando la fórmula $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ encontramos que

$$\int \cot^2 x\, dx = \int (\csc^2 x - 1)\, dx = -\cot x - x + k$$

Por otra parte,

$$\int \sec^4 x\, dx = \int (\sec^2 x) \sec^2 x\, dx = \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \tan^2 x d(\tan x)$$

$$= \tan x + \frac{\tan^2 x}{3} + k$$

El método empleado ahora puede aplicarse para evaluar la integral de la función sec elevada a un número entero *par.*

De manera similar puede obtenerse una fórmula para la integral de la función csc elevada a una potencia *par.*

Usando ahora la fórmula

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

se tiene

$$\int \operatorname{sen}^5 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + k;$$

de manera semejante, se tiene

$$\int \cos^5 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) d(\operatorname{sen} x)$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + k$$

Los métodos empleados en estos ejemplos sugieren cómo evaluar las integrales de las potencias impares de las funciones sen y cos.

Hemos visto cómo se determina la integral de la función $\tan^2$. Con esto sabemos, de hecho, el procedimiento para determinar la integral de las potencias

pares de la función tan; sin embargo, para ilustrar el proceso general, evaluemos la integral de potencia cuatro de esa misma función.

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1)^2\,dx = \int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)\,dx \\ &= \int \sec^2 x(\tan^2 x + 1)\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx + \int dx \\ &= \int \tan^2 x d(\tan x) + \int \sec^2 x\,dx - 2\tan x + x + k \\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - 2\tan x + x + k \\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + k\end{aligned}$$

Para obtener la integral de las potencias pares de la función cot, procedemos en forma análoga.

Si la potencia es impar para la función tan, entonces se procede como en el ejemplo siguiente:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan^2 x \tan x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx \\ &= \int \sec^2 x \tan x\,dx - \int \tan x\,dx \\ &= \int \sec x(\sec x \tan x)\,dx - \int \tan x\,dx \\ &= \int \sec x d(\sec x) - \int \tan x\,dx = \frac{\sec^2 x}{2} - \int \tan x\,dx\end{aligned}$$

Sin embargo, ahora debe calcularse el valor de la integral de la tangente, para lo cual se procede de la manera siguiente, recordando que $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log|\cos x| + k$$

Así, por último, se obtiene

$$\int \tan^3 x\,dx = \frac{\sec^2 x}{2} - \log|\sec x| + k$$

Para obtener la integral de potencias impares de la función cot procedemos de manera semejante.

Ahora, para encontrar la integral de una potencia impar de la función sec, se procede así:

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec^2 x \sec x\,dx;$$

resolviendo por partes, se tiene

$$u = \sec x, \qquad dv = \sec^2 x\,dx,$$

con lo que

$$du = \sec x \tan x\,dx; \quad v = \tan x$$

Así,

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \underbrace{\int \tan^2 x \sec x\,dx}_{\text{(a)}}$$

Para resolver (a), se procede como sigue:

$$\int \tan^2 x \sec x\,dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x\,dx$$
$$= \int \sec^2 x\,dx - \underbrace{\int \sec x\,dx}_{\text{(b)}}$$

Calculando ahora (b), tenemos

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx$$

Por tanto,

$$\int \sec x\,dx = \log|\tan x + \sec x| + k$$

De esta manera, se tiene

$$\int \tan^2 x \sec x\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \log|\tan x + \sec x|,$$

y, finalmente, se obtiene

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\{\sec x \tan x + \log|\tan x + \sec x|\} + k$$

De manera análoga se procede para calcular la integral de la función csc elevada al cubo. De hecho, los métodos sugeridos abarcan todos los casos para potencias pares e impares, aunque resultará que el proceso es más laborioso cuanto más grande es la potencia en cuestión.

A continuación se da un ejemplo ilustrativo para resolver integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$, donde n o m es un número entero impar.

EJEMPLO Calcúlese

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$$

Solución

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x)\cos x\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x)d(\operatorname{sen} x) \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + k
\end{aligned}$$

Si n y m son impares, procedemos como se indica en el ejemplo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \cos x\,dx \\
&= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^3 x\,d\operatorname{sen} x \\
&= \int (\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^5 x)d\operatorname{sen} x \\
&= \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + k
\end{aligned}$$

Si n y m son pares, entonces procedemos como en el ejemplo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int 1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + k
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

10.1 Calcúlense las integrales indefinidas siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-3}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x+1}}$

e) $\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

g) $\displaystyle\int \tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$ h) $\displaystyle\int \tan^4 x\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ang\,tan} x}$ j) $\displaystyle\int \cos 5x\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{(1+\cos 2x)^2}$ l) $\displaystyle\int 3^x e^x\,dx$

m) $\displaystyle\int e^{-3x}\,dx$ n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

o) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$ p) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$

q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx$ r) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ t) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

u) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\,dx$ v) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$

w) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\,dx$ x) $\displaystyle\int \cos^2 x\operatorname{sen}^4 x\,dx$

y) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}$ z) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

10.2 Evalúense las integrales siguientes, aplicando las sustituciones indicadas.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\cos^2 x\,dx;\ u=\cos x$ b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}};\ 2+4x=t^2$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}(2x^2)\,dx;\ u=2x^2$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx;\ u=\operatorname{sen} x$

e) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}};\ z=\frac{1}{x}$

10.3 Pruébese que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-t)\,dt$$

10.4 Calcúlense las integrales indefinidas siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3 - x + 2}$ b) $\displaystyle\int \frac{(x^2-2)\,dx}{x^2 + x + 1}$

c) $\displaystyle\int \frac{3dx}{x - x^2}$ d) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{x^5 - 2x + 1}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^3 - 2x}$ f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^3}\,dx}{x^3 - 2x + 8}$

10.5 Calcúlense las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\,dx$ [*Sugerencia:* $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y))$.]

b) $\displaystyle\int \cos 2x \operatorname{sen} 4x\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x\,dx$

Carl Friedrich Gauss
(1777 a 1855)

El genio de Gauss, como el de Arquímedes y Newton, trasciende hasta la época actual, y ha marcado un hito en el pensamiento científico. Debido a su habilidad para las matemáticas y los idiomas, fue recomendado con el duque de Brunswick, de quien recibió ayuda financiera para continuar sus estudios hasta la Universidad de Gotinga.

A los 16 años intuyó la existencia de geometrías no euclidianas, y más tarde, en 1829, comunicó a Bessel que posiblemente nunca publicaría sus trabajos sobre este tema. Se sabe de ellos a través de cartas a sus amigos, dos breves trabajos publicados en la revista Göttingische Gelehrte Anzeigen, *en 1816 y 1822, y algunas notas encontradas entre sus papeles después de su muerte. Existe evidencia de que Bolyai y Lobatschevsky fueron influidos por las ideas de Gauss acerca de las geometrías no euclidianas. A los 22 años obtuvo su doctorado, habiendo probado en su tesis el teorema fundamental del álgebra.*

Por vez primera utilizó los números complejos en su trabajo Disquisitiones Arithmeticae.

En 1821, tuvo la oportunidad de aplicar sus dotes extraordinarias de calculista. El primer día del año se descubrió un asteroide, bautizado como Ceres, que parecía aproximarse al Sol. Los astrónomos no habían podido calcular su órbita a pesar de haber podido observarlo durante 40 días antes de perderlo de vista. Con sólo tres observaciones, Gauss desarrolló una técnica para calcular sus componentes orbitales con una exactitud tal que los astrónomos pudieron localizar sin dificultad a Ceres, a fines de 1822 y principios de 1823. Esta técnica condujo a Gauss a desarrollar un método de ajuste de curvas conocido como «mínimos cuadrados». Su Theoria motus corporum celestium *es una de las grandes obras de astronomía.*

No obstante haber publicado relativamente poco por el tiempo dedicado a pulir sus obras, sus aportaciones fueron tan amplias e importantes que no es posible dar una idea cabal de ellas en este resumen. Sólo se señalará que Gauss fue un gran matemático, tanto teórico como aplicado; se le considera pionero en la aplicación de la matemática a la gravitación, la electricidad y el magnetismo; desarrolló la teoría del potencial y el análisis real. Antes que él, Euler, Lagrange y Monge habían investigado la geometría sobre ciertos tipos de superficies curvas; Gauss atacó el problema en su generalidad. Su obra Disquisitiones Generales

Circa Superficies Curvas *(1827) es de una importancia tal que, gracias a ella, la geometría diferencial adquiere un desarrollo extraordinario.*

Al morir Gauss se acuñaron monedas en su honor y se le otorgó, como tributo, el título de «Mathematicorum princeps» («Príncipe de la matemática»).

En forma paralela a la vida de Gauss se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Goethe: *Años de aprendizaje de Wilhelm Meister*, 1796; *Fausto*, 1832.
Pushkin: *Rusland y Ludmila*, 1822.
Rousseau: *Confesiones*, 1788.
Schiller: *Oda a la alegría*, 1785; *Guillermo Tell*, 1804.

MUSICA

Beethoven: *La patética*, 1799; *Concierto Emperador*, 1809; entre 1800 y 1823, compuso sus nueve sinfonías; *Missa solemnis*, 1823.
Cimarosa: *El matrimonio secreto*, 1792.
Haydn: *Sinfonía Oxford*, 1789; *La Creación*, 1798; *Las Estaciones*, 1801.
Mozart: *Concierto para flauta y arpa*, 1778; *Misa de la Coronación*, 1779; *Sinfonías núms. 35 y 36*, 1782; *Conciertos para piano núms. 20, 21 y 22*, 1785; *Las bodas de Figaro*, 1786.

PINTURA

De la Croix: *Dante y Virgilio en los infiernos*, 1824.
Goya: *La maja desnuda, La maja vestida*, 1804; *Los desastres de la guerra*, 1810; *El aquelarre*, 1819; *Saturno devorando a sus hijos*, 1821.

CULTURA EN GENERAL

Kant, E.: *Crítica de la razón p⸱⸱a*, 1781; *Crítica de la razón práctica*,
Laplace: *Exposición del sistema ⸱⸱l mundo.*
Lavoisier: *Tratado elemental de química*, 1789.
Se establece el sistema métrico decimal, 1793.



Carl Friedrich Gauss

11 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

AREAS DE REGIONES PLANAS

Supóngase que f* es una función no negativa, definida en un intervalo $[a, b]$. Por lo visto en el capítulo anterior, el área A del conjunto acotado por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, no es sino la integral definida,

$$\int_a^b f(x)dx$$

En forma análoga, se tiene que si $f \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$$

(Véase Ejercicio 9.11.)

Por tanto, para este caso,

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \geqslant 0, \qquad \textbf{[11.1]}$$

y se dice que el área del conjunto acotado por la gráfica de f y el eje x entre los límites a y b es la integral de la izquierda en [11.1]. (Véase Fig. 11.1.)

En forma más general, tenemos

DEFINICION 11.1 *El área del conjunto acotado por la gráfica de F, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ es la integral definida*

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

* Las funciones consideradas en lo que sigue son integrables. En particular, por el teorema 9.2, los resultados son válidos para funciones continuas.

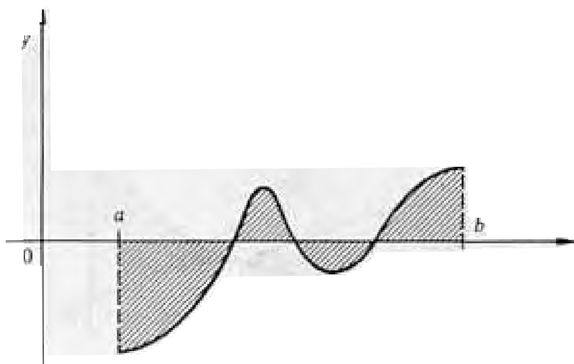
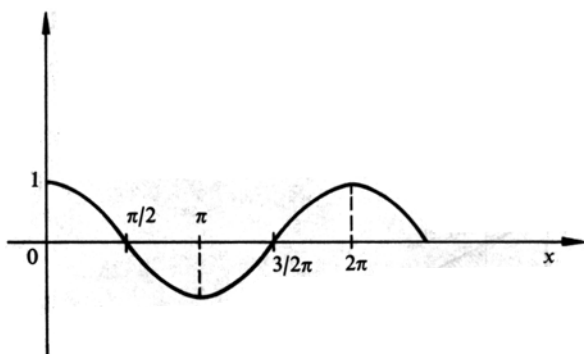


Fig. 11.1 Area sin orientación.

EJEMPLOS

1. Calcúlese el área del conjunto acotado por $\cos x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.



Por definición, se tiene

$$A = \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx - \int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\, dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos x\, dx =$$

$$= \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} - \operatorname{sen} x \Big|_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} + \operatorname{sen} x \Big|_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = 4 \text{ unidades de área.}$$

Esta definición se generaliza de la manera siguiente:

DEFINICION 11.2 *Sean f y g dos funciones definidas en $[a, b]$. El área de la región limitada por las gráficas de las dos funciones y las rectas $x = a$ y $x = b$ es*

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Obsérvese que en la figura 11.2 se tiene que $f(x) \geqslant g(x)$ si $a \leqslant x \leqslant c$ y $g(x) \geqslant f(x)$ en caso de que $c \leqslant x \leqslant b$.

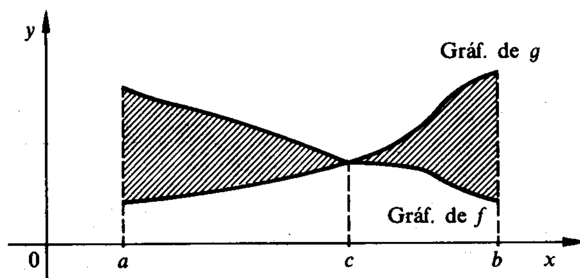
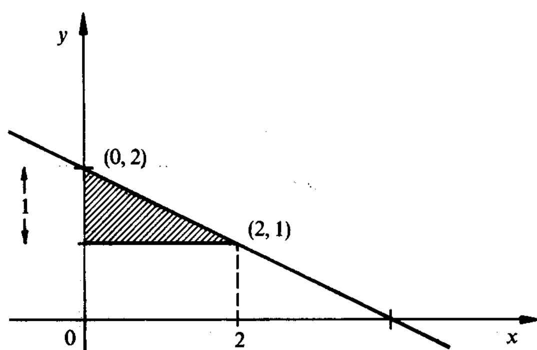


Figura 11.2

Además, si se toma $g(x) = 0$ para todo x, entonces se tiene [11.1].

2. Sean $g(x) = 1$ y $f(x) = 2 - (x/2)$. Calcúlese el área comprendida entre las gráficas de $g(x)$ y $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.



Solución

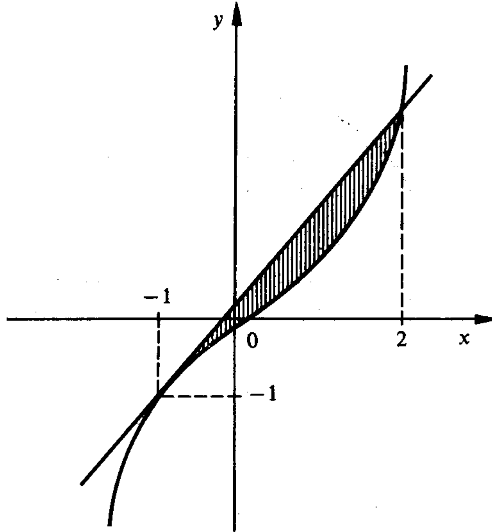
$$\int_0^2 |f(x) - g(x)|dx = \int_0^2 \left|2 - \frac{x}{2} - 1\right|dx,$$

y como $0 \leqslant x/2 \leqslant 1$ si $0 \leqslant x \leqslant 2$, entonces, en lo que sigue, podemos quitar las barras del valor absoluto, o sea,

$$\int_0^2 |f(x) - g(x)|dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = 2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^2 = 1 \text{ unidades de área.}$$

Nótese que este resultado coincide con el obtenido mediante la fórmula para el área de un triángulo.

3. Calcúlese el área del conjunto acotado por las curvas $y = x^3$ e $y = 3x + 2$.



Considérese la función $x^3 - (3x + 2)$ que se anula en $x = 2$ y $x = -1$. Como la recta $y = 3x + 2$ es tangente a $y = x^3$ en $(-1, -1)$, se sigue que $y = 3x + 2$ se encuentra por arriba de $y = x^3$ entre los valores $-1 \leqslant x \leqslant 2$; es decir,

$$3x + 2 \geqslant x^3 \quad \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 2$$

Por tanto, el área es

$$\int_{-1}^{2} [(3x + 2) - x^3]dx = \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{2} = \frac{27}{4} \text{ unidades de área.}$$

4. Calcúlese el área limitada por una circunferencia de radio r. Esta última puede representarse analíticamente mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad r > 0,$$

de donde

$$y^2 = r^2 - x^2$$

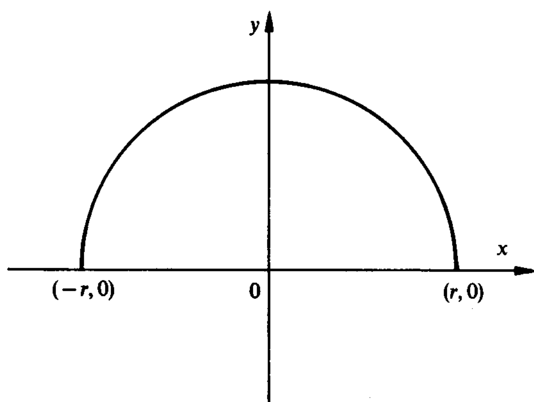
y, así,

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Por consiguiente, la igualdad

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

proporciona una función cuya gráfica son los puntos (x, y) de la circunferencia, tales que $y \geqslant 0$.



Si se considera la función $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, se obtiene la otra parte de la circunferencia. Además, dado que la circunferencia es simétrica respecto al eje x, el área A pedida es igual al doble del área del conjunto acotado por la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, el eje x, y por las rectas $x = -r$ y $x = r$; es decir,

$$A = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \qquad \textbf{[11.2]}$$

Al hacer un cambio de variable se tiene

$$x = r\cos t, \quad dx = -r \operatorname{sen} t\, dt$$

Como x toma todos los valores comprendidos en $[-r, r]$ para t en $[-\pi, 0]$, la ecuación [11.2] se convierte en

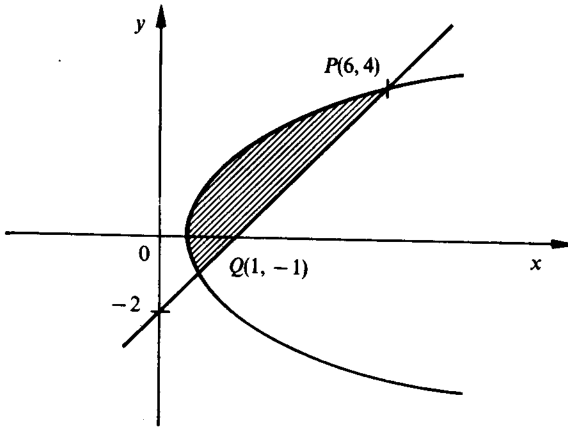
$$A = 2\int_{-\pi}^{0} \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 t}\,(-r \operatorname{sen} t)\, dt = 2\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}^2 t\, dt,$$

que, mediante los métodos estudiados en el capítulo anterior, da

$$A = 2r^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \pi r^2 \text{ unidades de área.}$$

5. Algunas regiones del plano están limitadas por rectas horizontales y curvas que pueden interpretarse como gráficas de funciones de y; la definición será aplicable a esas regiones, pero integrando respecto a y.

   Hállese el área acotada por las gráficas de las funciones $y^2 = 3x - 2$ e $y = x - 2$ (véase figura siguiente).



Los puntos de intersección de las gráficas de las dos funciones son $P(6,4)$ y $Q(1,-1)$; así, se tiene que

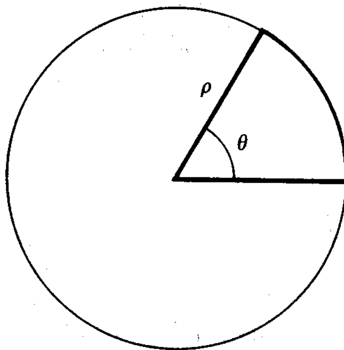
$$\text{área} = \int_{-1}^{4}\left[(y+2) - \frac{y^2+2}{3}\right]dy = \frac{1}{3}\int_{-1}^{4}(-y^2+3y+4)dy,$$

de donde

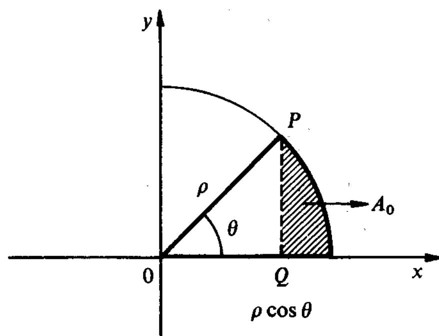
$$\text{área} = \frac{1}{3}\left[-\frac{y^3}{3}\bigg|_{-1}^{4} + 3\frac{y^2}{2}\bigg|_{-1}^{4} + 4y\bigg|_{-1}^{4}\right] = \frac{125}{18} \text{ unidades de área.}$$

AREA EN COORDENADAS POLARES

Antes de encontrar la fórmula para calcular el área de una región expresada en coordenadas polares, se calculará el área A de un sector circular, cuyo ángulo central es θ y cuyo radio es ρ.



No se pierde generalidad si se coloca este sector en la forma indicada en la figura siguiente y se supone que $0 < \theta \leqslant \pi/2$.



Como $x^2 + y^2 = \rho^2$, se tiene que $y = \sqrt{\rho^2 - x^2}$.

Se sabe que el área A_0 de la región que aparece sombreada en la figura anterior está dada por

$$A_0 = \int_{\rho\cos\theta}^{\rho} y\,dx = \int_{\rho\cos\theta}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2}\,dx$$

Para calcular esa integral hágase el siguiente cambio de variable $x = \rho\cos u$, con lo que

$$A_0 = -\int_{\theta}^{0} \rho^2\sqrt{1 - \cos^2 u}\,\operatorname{sen} u\,du = \rho^2 \int_{0}^{\theta} \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{\rho^2}{2}\left(u - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right)\Bigg|_0^{\theta}$$

De donde,

$$A_0 = \frac{\rho^2\theta}{2} - \frac{\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta}{4} = \frac{\rho^2\theta}{2} - \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}$$

Por otra parte, el área del triángulo $OPQ = \frac{1}{2}(\rho\cos\theta)(\rho\operatorname{sen}\theta)$ y, como $A = A_0 +$ área ΔOPQ, se concluye que

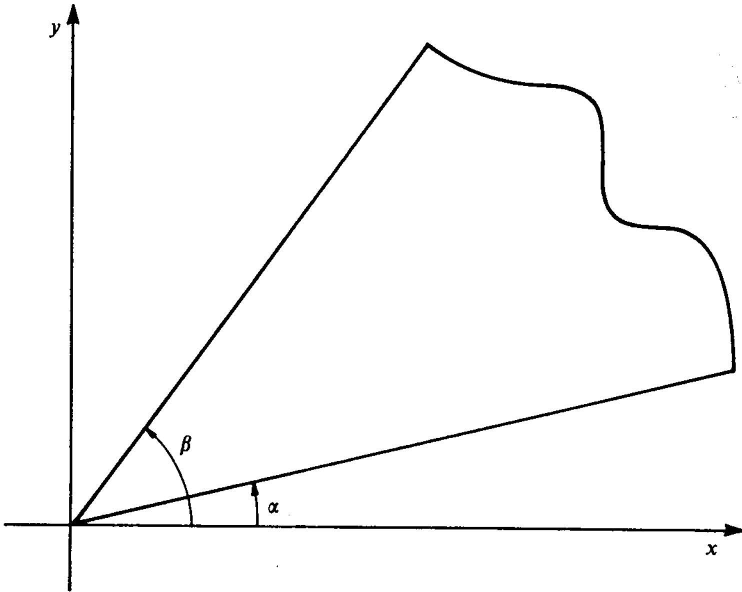
$$A = \tfrac{1}{2}\rho^2\theta$$

Empleando lo anterior, se encontrará una expresión para calcular el área de ciertas regiones acotadas por las gráficas de algunas ecuaciones polares.

Considérese una curva definida en coordenadas polares por la ecuación $\rho = f(\theta)$, con f continua y positiva, y $0 \leqslant \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \leqslant 2\pi$.

El área A que se desea calcular es la de la región limitada por dicha curva y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (véase figura siguiente).

Para hacerlo se procede en forma semejante a la seguida con coordenadas rectangulares. Así, el ángulo $\beta - \alpha$ se subdivide en n subángulos; es decir, se consideran las rectas $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, ..., $\theta = \theta_n$, donde $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < < \theta_n = \beta$ (en coordenadas rectangulares se subdivide un segmento).



Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, sea R_i la región limitada por la gráfica de $\rho = f(\theta)$ y las rectas $\theta = \theta_{i-1}$ y $\theta = \theta_i$ [Fig. 11.3(a)].

Si M_i y m_i son el máximo y el mínimo, respectivamente, de f para $\theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i$, entonces R_i está comprendida entre los círculos de radios M_i y m_i y que tienen su centro en O [Fig. 11.3(b)]. Así,

$$\frac{m_i^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) \leqslant A \leqslant \frac{M_i^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{i-1}^{n} \frac{m_i^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) \leqslant A \leqslant \sum_{i-1}^{n} \frac{M_i^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})$$

Las últimas desigualdades pueden escribirse de la manera siguiente:

$$L\left(P; \frac{f^2}{2}\right) \leqslant A \leqslant U\left(P; \frac{f^2}{2}\right), \quad \text{donde} \quad P = \{\alpha = \theta_0, \theta_1, ..., \theta_n = \beta\}$$

Como lo anterior es válido para toda participación P de $[\alpha, \beta]$, entonces,

$$\underline{\int_a^b} \frac{f^2(\theta)}{2} d\theta \leqslant A \leqslant \overline{\int_a^b} \frac{f^2(\theta)}{2} d\theta,$$

y dado que f es integrable por ser continua, se concluye entonces que

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta$$

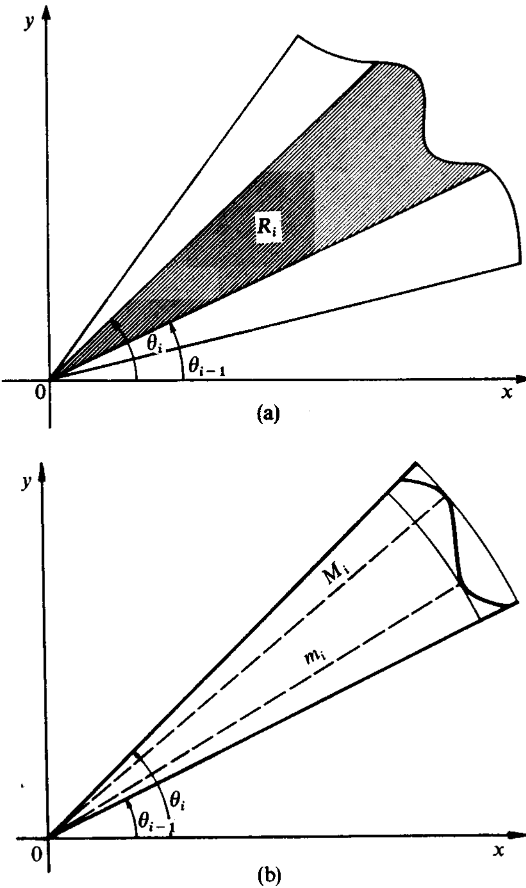
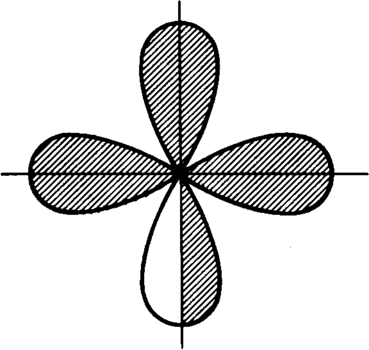


Figura 11.3

EJEMPLO Hállese el área A de uno de los pétalos de la rosa de cuatro pétalos $\rho = 2\cos 2\theta$ (véase figura siguiente).



$g: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\operatorname{im} g$ es un intervalo cerrado.) Entonces,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

El resultado es obvio si g es una función constante. Por tanto, supóngase que no lo es.

Demostración

Sea F una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [c, d]$.

Entonces, por la regla de la cadena, $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)g'(t)$. En efecto,

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero $F(g(b)) - F(g(a))$ es exactamente la integral

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

EJEMPLOS

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx = \int_0^1 u^3 \cdot u'\,du = \left.\frac{u^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}.$

   Ya que la función $u = \operatorname{sen} x$ transforma el intervalo $[0, \pi/2]$ en $[0, 1]$.

2. Considérese la integral

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$$

   y el cambio de variable $x(t) = 1 + t^2$; es decir,

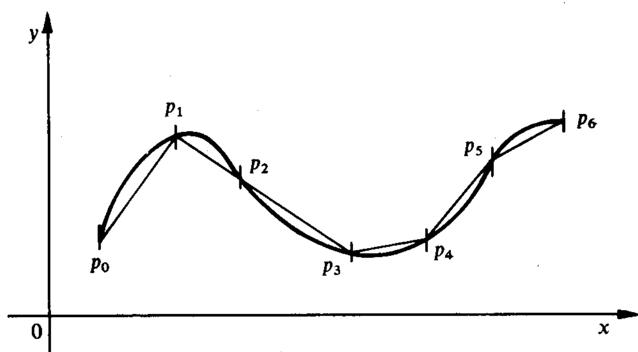
$$x - 1 = t^2$$
$$x'(t) = 2t;$$

   el intervalo $[1, 5]$ viene del intervalo $[0, 2]$ bajo la función $x(t)$; entonces, por el teorema anterior,

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \int_0^2 \frac{t}{1+t^2}\,2t\,dt$$

3. La integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6 - 5\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}$$



Entonces, la poligonal que une esos puntos tiene por longitud

$$S = \sum_{i=1}^{n} P_{i-1}P_i$$

Si las longitudes $P_{i-1}P_i$ de la igualdad anterior se expresan analíticamente, se tiene

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Aplíquese el teorema del valor medio a f en los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y, así,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i))^2(x_i - x_{i-1})^2},$$

donde

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$$

Así, se tiene

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \qquad [11.3]$$

Cuando se toman particiones cada vez más finas, es decir, cuando la norma de P tiende a cero, se tiene que [11.3] tiende a la integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad [11.4]$$

debido a que f' es continua. Y, por otra parte, resulta ser intuitivamente claro que las poligonales correspondientes a las particiones P se van aproximando a la curva y, por tanto, sus longitudes [11.3] deberán aproximarse a la longitud de la curva.

Así resulta apropiado que la longitud de $\mathscr{C}$ se defina como la integral [11.4].

LONGITUD DE UNA CURVA EXPRESADA EN FORMA PARAMETRICA

Supóngase que la curva $\mathscr{C}$ está expresada en forma paramétrica; es decir, que existen dos funciones

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

definidas y continuas en un intervalo $[a, b]$ y tales que $\mathscr{C}$ es la imagen de $\gamma(t) = (f(t), g(t))$. Supongamos además que f' y g' son también continuas en $[a, b]$.

Sea P una partición de $[a, b]$, esto es,

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\},$$

y los puntos correspondientes en la curva $\mathscr{C}$,

$$R = \{(f(t_0), g(t_0)), (f(t_1), g(t_1)), \ldots, (f(t_n), g(t_n))\}$$

La poligonal que une los puntos de R tiene por longitud

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}$$

Si se aplica el teorema del valor medio a f y g en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de $[a, b]$, se tiene

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(c_i))^2(t_i - t_{i-1})^2 + (g'(d_i))^2(t_i - t_{i-1})^2},$$

donde

$$t_{i-1} \leqslant c_i \leqslant t_i \quad \text{y} \quad t_{i-1} \leqslant d_i \leqslant t_i;$$

al sacar a $(t_i - t_{i-1})$ del radical, tenemos

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2}(t_i - t_{i-1}) \qquad [11.5]$$

Tomando particiones P de $[a, b]$ de tal manera que $\Delta P \to 0$, se tiene que [11.5] tiende, por ser f' y g' continuas, a la integral

$$\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt.$$

Por lo que se define la longitud de $\mathscr{C}$ como el valor de esta integral.

EJEMPLO Calcúlese la longitud de la circunferencia de radio a.

Esta curva está representada por la función (x, y), donde

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

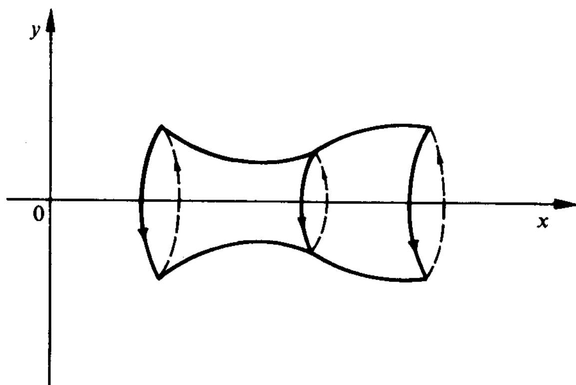
Así, la longitud de la circunferencia se obtiene mediante la integral

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{((a\cos t)')^2 + ((a\,\mathrm{sen}\,t)')^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t\,dt} =$$

$$= \int_0^{2\pi} a\,dt = 2\pi a \text{ unidades de longitud.}$$

VOLUMEN DE SOLIDOS DE REVOLUCION

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$. Giremos la gráfica de f alrededor del eje x, y consideremos el sólido limitado por la superficie resultante al haberla girado; el objetivo es encontrar el volumen de este sólido.



Dada una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, se considerará el sólido formado por la unión de n cilindros, donde el i-ésimo cilindro tiene radio $|f(\xi_i)|$ y altura $(x_i - x_{i-1})$, donde $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$. Entonces, este cilindro tiene el volumen

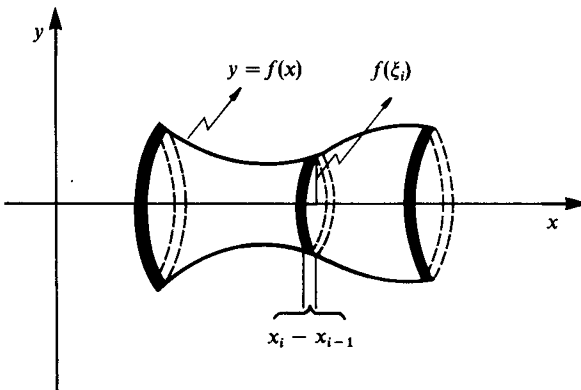
$$\pi|f(\xi_i)|^2(x_i - x_{i-1}),$$

pero

$$|f(\xi_i)|^2 = (f(\xi_i))^2$$

Por tanto, el sólido, que es la unión de los n cilindros, tiene por volumen

$$V_p = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i))^2(x_i - x_{i-1})$$



Por ser f continua en $[a, b]$, al tomar particiones P tales que $\Delta P \to 0$, se tiene que V_p tiende a la integral definida

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

que será, por definición, el volumen del sólido generado al girar la gráfica de f alrededor del eje x.

EJEMPLOS

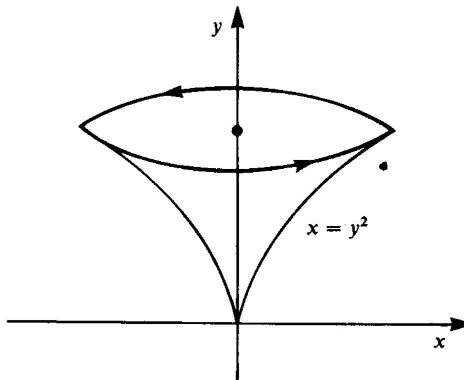
1. Calcúlese el volumen de la bola de radio r; para esto, se gira la gráfica de la función

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

alrededor del eje x; por tanto, se calcula la integral

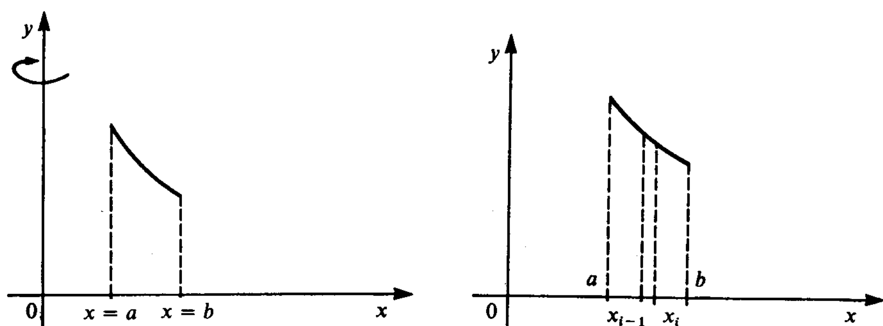
$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ unidades de volumen.}$$

2. Calcúlese el volumen del sólido generado al girar la gráfica de $x = f(y) = y^2$, $0 \leqslant y \leqslant a$, alrededor del eje y.



$$V = \pi \int_{-r}^{r} [f(y)]^2 dy = \int_0^a \pi y^4 dy = \pi \frac{y^5}{5}\bigg|_0^a = \pi \frac{a^5}{5} \text{ unidades de volumen.}$$

Ahora gírese la región bajo la gráfica de $f(x)$ alrededor del eje y; esto es, considérese la región comprendida entre el eje x, la gráfica de la función y las rectas $x = a$ y $x = b$, donde $a \geqslant 0$ (véase figura siguiente) y gírese ésta alrededor del eje y, con lo que quedará determinado el sólido al que nos referimos. Se procederá a obtener el volumen V de este sólido.



Considérese una partición P del intervalo $[a, b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

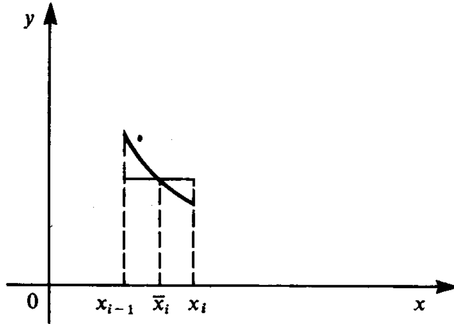
en particular, la región limitada por la gráfica de la función, el eje x y las rectas $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$.

Si se obtiene una aproximación del volumen V_i del sólido generado al girar esta región alrededor del eje y, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, resultará que, al sumarlas, se obtendrá una aproximación del volumen buscado.

Sea $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, como la función es continua, $f(\bar{x}_i) \cong f(x)$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$; en otras palabras, la porción de la gráfica de f sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ está próxima al segmento de recta $y = f(\bar{x}_i)$ localizado sobre el mismo intervalo.

Así, V_i es aproximadamente igual al volumen del sólido generado al girar el rectángulo de altura $|f(\bar{x}_i)|$ y base $x_i - x_{i-1}$ alrededor del eje y. Es claro que este último sólido es la región comprendida entre dos cilindros concéntricos. Por tanto,

$$V_i \cong \pi|f(\bar{x}_i)|(x_i^2 - x_{i-1}^2) = 2\pi|f(\bar{x}_i)|\frac{(x_i + x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})$$



Obsérvese que $(x_i + x_{i-1})/2$ es el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Así, al tomar $\bar{x}_i = (x_i + x_{i-1})/2$ y sumar las V_i, tenemos

$$V \cong 2 \sum_{i=1}^{n} \pi |f(\bar{x}_i)| \bar{x}_i (x_i - x_{i-1}),$$

de donde, pasando al límite,

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx$$

3. Sea $f(x) = x^3$ en $[1, 2]$. Calcúlese el volumen del sólido generado al girar la región bajo la gráfica de f alrededor del eje y.
Solución

$$V = 2\pi \int_1^2 x^4 dx = 2\pi \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{5} \text{ unidades de volumen.}$$

4. Sea $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$. Calcúlese el volumen del sólido generado al girar la región bajo la gráfica de f alrededor del eje y.
Solución Obsérvese que basta girar la región comprendida en el intervalo $[0, 1]$ pues, de otra manera, el *sólido se genera dos veces:*

$$V = 2\pi \int_0^1 x^3 dx = 2\pi \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ unidades de volumen.}$$

Si se hubiera aplicado la fórmula en $[-1, 1]$, se habría obtenido

$$2\pi\left[\int_{-1}^{0} -x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx\right] = 2\pi\left[-\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1\right] = \pi \text{ unidades de volumen;}$$

es decir, se tendrían dos veces el volumen del sólido.

AREA DE SOLIDOS DE REVOLUCION

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y con derivada f' también continua en $[a, b]$. Se calculará ahora el área A del sólido generado al girar alrededor del eje x esta gráfica.

Como se sabe, el área de un cono truncado con radios r_1, r_2 y lado l es igual a

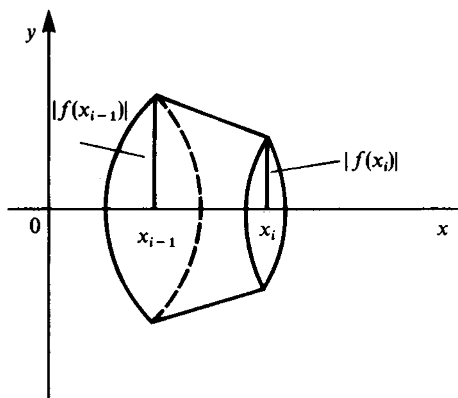
$$\pi(r_1 + r_2)l$$

Tómese una partición del intervalo $[a, b]$, es decir,

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

y considérese la poligonal determinada por los puntos $((x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

Considérese también la región determinada por la gráfica de f, las rectas $x = x_{i-1}, x = x_i$ y el eje x y gírese ésta alrededor del eje x.



Una aproximación del área, en este caso, es el área del cono truncado, con radios $|f(x_{i-1})|$ y $|f(x_i)|$ y lado

$$\sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}$$

El área de este cono truncado es

$$A_i = \pi(|f(x_i)| + |f(x_{i-1})|)\sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}$$

Por el teorema del valor medio, el área A_i puede escribirse como

$$A_i = \pi(|f(x_i)| + |f(x_{i-1})|)\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2 f'(\overline{x}_i)},$$

donde $\overline{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$; por tanto,

$$A_i = \pi(|f(x_i)| + |f(x_{i-1})|)[(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\overline{x}_i))^2}]$$

Así,

$$A \cong \pi \sum_{i=1}^{n} (|f(x_i)| + |f(x_{i-1})|)[(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\bar{x}_i))^2}]$$

Pasando al límite

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

EJEMPLO Calcúlese el área de un paraboloide que se genera al girar alrededor del eje x al arco de la parábola $y^2 = 2px$, determinado por las condiciones $0 \leqslant x \leqslant a$ y $0 \leqslant y$.

Solución Tenemos que $y = \sqrt{2px}$ e $y' = \sqrt{2p}/2\sqrt{x}$, por lo que

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}$$

Al aplicar la fórmula, se tiene que

$$A = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x + p}{2x}}\, dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x + p}\, dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x + p)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi\sqrt{p}\,[(2a + p)^{3/2} - p^{3/2}] \quad \text{unidades cuadradas.}$$

TRABAJO

Ahora se calculará el trabajo desarrollado al desplazar un objeto una distancia S. La trayectoria descrita no tiene por qué ser rectilínea; no obstante, nos restringiremos a tal caso y supondremos que las fuerzas consideradas tienen la dirección del desplazamiento.

En física se dice que si se aplica una fuerza constante a un objeto, entonces el *trabajo* desarrollado por la fuerza está dado por

trabajo = fuerza × distancia,

donde la fuerza se considera negativa si tiene sentido contrario al desplazamiento.

¿Cómo proceder si la fuerza no es constante? Responderemos a tal cuestión con consideraciones familiares al lector.

Considérese una partición P del intervalo $[a, b]$, es decir,

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\},$$

y sea $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; entonces el trabajo T, desarrollado por la fuerza f sobre la partícula en cuestión en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, es aproximadamente igual a

$$f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Consideremos la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

donde

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

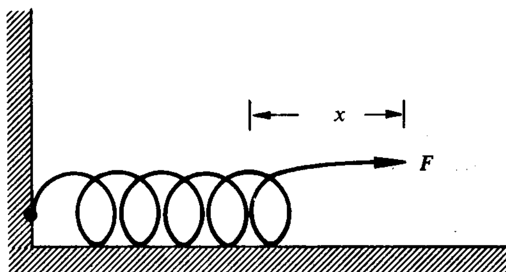
Esta suma dará aproximadamente el trabajo desarrollado en el intervalo $[a, b]$. De nuevo, si se toman particiones P cuando $\Delta P \to 0$, entonces la suma anterior, suponiendo que f es continua, tiende a la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Esta integral se conoce como el *trabajo desarrollado* por la fuerza f sobre un objeto en el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLOS

1. Consideremos un resorte como el de la figura siguiente,



donde la fricción es despreciable y en el cual se aplica una fuerza para alargarlo x unidades. En física se sabe que la fuerza está dada por la ley de Hooke, es decir,

$$F(x) = -kx,$$

donde k es el coeficiente de restitución del resorte.

2. Ahora supongamos que el resorte tiene una longitud natural igual a 10 cm y que, al aplicársele una fuerza de 3 newtons, se alarga una distancia de 2 cm.

Se pide encontrar el trabajo desarrollado para alargarlo de 13 a 15 cm.
Solución Como $F(x) = kx$ se tiene que

$$3 = k \cdot 2 \times 10^{-2},$$

de donde

$$k = 150 \text{ N/m}.$$

Por tanto,

$$I = \int_{13 \times 10^{-2}}^{15 \times 10^{-2}} 150x dx = 75x^2 \Big|_{0.13}^{0.15} = 0.42 \text{ joules}$$

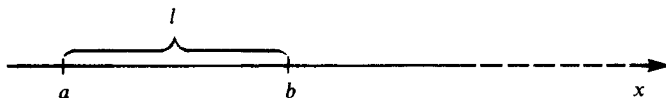
(1 joule = 1 newton × 1 metro)

MAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Masa de una varilla no homogénea

En el capítulo 5, sección razón de cambio, ejemplo 1, se definió el concepto de densidad lineal para una varilla rectilínea. De lo ahí expuesto se sigue que, si la varilla tiene densidad lineal ρ constante y longitud l, entonces su masa es $m = \rho l$.

Si la varilla no es homogénea, pero la función $\rho(x)$ es continua, entonces se le coloca sobre el eje x y se considera una partición del intervalo $[a, b]$



y se toman puntos $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$, lo que permite aproximar la masa m de la varilla mediante la suma siguiente

$$m \cong \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Considérese el límite de esta suma cuando $\Delta P \to 0$ y tómese en cuenta que ρ es una función continua; por último, se tendrá que

$$m = \lim_{\Delta P \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \rho(x)dx$$

Momento de masa de una varilla rectilínea

Considérense n partículas alineadas cuyas masas están representadas por $m_i (i = 1, 2, ..., n)$. Oriéntese la recta que contiene a las partículas, fíjese sobre ella un origen O y asígnense abscisas a cada punto de esta recta.

Se denomina *momento de masa* del sistema de n partículas respecto a O a la suma

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$

donde x_i es la abscisa de la i-ésima partícula.

En el caso de una varilla no homogénea se toma una partición $P = \{a = x_0 < < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. La parte comprendida en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se toma como una partícula localizada en un punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

En este punto, la masa aproximada de esta partícula es

$$\rho(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

(véase Sec. anterior).

Así pues, en este caso,

$$\sum_{i=1}^{n} [\rho(\xi_i)(x_i - x_{i-1})],$$

es aproximadamente igual al momento de masa del conjunto de las partículas que se han considerado; si tomamos el límite de esta última suma cuando $\Delta P \to 0$, se obtendrá entonces lo que se llama el momento de masa de la varilla, o sea,

$$M = \lim_{\Delta P \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \rho(\xi_i)\, \Delta x_i;$$

esto es,

$$M = \int_a^b x\rho(x)dx, \quad \text{dada una continuidad de } \rho.$$

Centro de masa de una varilla

Si se considera de nuevo un sistema de partículas alineadas, el centro de masa de ese sistema es el punto C_M, tal que el momento de masa del sistema respecto a cualquier punto O, es igual al producto de la masa total y la abscisa $\bar{x}$, respecto a este origen O, del punto C_M. Para el caso de la varilla ejemplificado

con anterioridad, si, de nuevo, se designa por $\bar{x}$ a la abscisa del centro de masa, entonces, por la definición de C_M, se tiene que

$$\underbrace{\int_a^b x\rho(x)dx}_{\text{momento de masa}} = \underbrace{\left(\int_a^b \rho(x)dx\right)}_{\text{masa total}} \cdot \underbrace{\bar{x}}_{\text{abscisa de } C_M \text{ respecto a } O}$$

De esta manera,

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\rho(x)dx}{\displaystyle\int_a^b \rho(x)dx}$$

Si ρ es constante, entonces

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b xdx}{l}$$

(Recuérdese que l = longitud de la varilla) y el punto x es el centro de la varilla, como puede comprobarse con facilidad.

Teorema de Pappo

Para estudiar una aplicación bastante útil, se generalizarán un tanto los resultados anteriores.

a) *Masa de una varilla curva.* Considérese que la varilla tiene forma de *curva lisa*, es decir, admite una parametrización $\gamma:[a, b] \to \mathbb{R}^2$ con funciones componentes γ_1, γ_2 que tienen derivadas continuas en $[a, b]$, y supóngase de nuevo que su sección transversal es despreciable.

Supóngase, además, que su densidad de masa es constante, o sea, que existe un número ρ tal que, para cualquier porción de la curva, su masa (de esta porción) es el producto de ρ por la longitud de tal porción. Por tanto, si m es la masa total de la varilla, se tiene que

$$m = \rho \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt$$

b) *Momento de masa de una varilla curva respecto a una recta.* En física, el momento de masa de un sistema de partículas (no necesariamente alineadas), con masas $m_1, ..., m_n$ respecto a una recta L, se define de la manera siguiente:

$$m_1d_1 + m_2d_2 + \cdots + m_nd_n,$$

donde d_i, $i = 1, 2, ..., n$ es la distancia dirigida* de la i-ésima partícula a la recta considerada. En particular, los momentos de masa respecto a los ejes x e y son:

$$M_x = \sum m_i y_i, \qquad M_y = \sum m_i x_i,$$

respectivamente, donde hemos seleccionado en la forma usual los semiplanos positivos correspondientes a los ejes x e y. Ahora se extienden estos últimos conceptos a una varilla curva del tipo mencionado en a).

Sea $t_0, ..., t_n$ una partición de $[a, b]$. La masa de la porción de la curva comprendida entre $\gamma(t_{i-1})$ y $\gamma(t_i)$ está dada por

$$\rho \int_{t_{i-1}}^{t} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt,$$

y podemos suponer que esta suma está concentrada en $\gamma(t_{i-1})$ para $i \in [1, ..., n]$, con lo cual se obtiene un sistema de n partículas.

El *momento de masa* M_x de este sistema respecto al eje x es

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_2(t_{i-1})\rho \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt$$

Por el teorema del valor medio para integrales, tenemos

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt = \sqrt{\gamma_1'^2(\bar{t}_i) + \gamma_2'^2(\bar{t}_i)}(t_i - t_{i-1}),$$

donde $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$.

Así,

$$M_x = \rho \sum_{i=1}^{n} \gamma_2(t_{i-1})\sqrt{\gamma_1'^2(\bar{t}_i) + \gamma_2'^2(\bar{t}_i)}(t_i - t_{i-1})$$

Al tomar particiones cada vez más finas, los sistemas de partículas obtenidos representan mejor a la curva y, por consiguiente, resulta natural definir el momento de masa de la curva respecto al eje x como el límite del miembro derecho de la igualdad cuando la norma de la partición tiende a cero, límite que coincide con

$$M_x^v = \rho \int_a^b \gamma_2(t)\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}\,dt$$

En forma análoga,

$$M_y^v = \rho \int_a^b \gamma_1(t)\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}\,dt$$

* La recta L divide al plano en dos semiplanos; seleccionamos uno como el semiplano positivo. Si un punto P está en este semiplano, su distancia dirigida a la recta será, simplemente, la distancia del punto a esa recta. Si el punto P está en el otro semiplano, la distancia dirigida será menos la distancia del punto a la recta.

Nótese que cuando la curva es la gráfica de una función $f(x)$ con derivada continua, las fórmulas anteriores se reducen a

$$M_x^v = \rho \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f')^2(x)}dx; \qquad M_y^v = \rho \int_a^b x\sqrt{1 + (f')^2(x)}dx \qquad \text{(A)}$$

c) *Centroide de una curva.* Las coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ del centroide de una curva $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ son:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\rho \int_a^b \gamma_2(t)\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}dt}{M} = \frac{\int_a^b \gamma_2(t)\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}\, dt}{\int_a^b \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}\, dt}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\rho \int_a^b \gamma_1(t)\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}dt}{M} = \frac{\int_a^b \gamma_1(t)\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}\, dt}{\int_a^b \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}\, dt}$$

Con todo lo anterior, puede ya enunciarse el teorema de Pappo en la versión siguiente:

TEOREMA DE PAPPO Sea C la gráfica de una función positiva $f(x)$ con derivada continua en $[a, b]$, donde $a > 0$ o $b < 0$. El área A del sólido de revolución obtenido al hacer girar a C alrededor del eje x es igual a

$$2\pi\bar{y} \operatorname{long} C, \qquad \text{(B)}$$

donde $\bar{y}$ es la ordenada del centroide de C y $\operatorname{long} C$ es la longitud de C.

Nota Del mismo modo, tenemos que el área del sólido de revolución obtenido al hacer girar a C alrededor del eje y es

$$2\pi\bar{x} \operatorname{long} C,$$

donde $\bar{x}$ es la abscisa del centroide de C.

Demostración
En (B) sustituimos lo que es $\bar{y}$ utilizando (A). Así,

$$2\pi\bar{y} \operatorname{long} C = \frac{2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx} \operatorname{long} C$$

y como

$$\operatorname{long} C = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

entonces

$$2\pi\bar{y}\,\text{long}\,C = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Y como ya se vio, ésta es el área A del sólido de revolución.

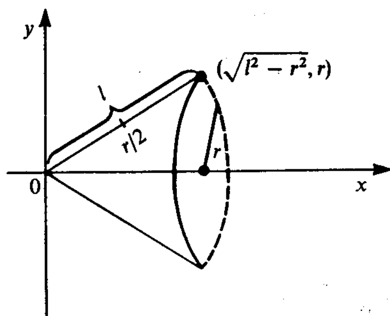
EJEMPLOS

1. Calcúlese el área de un cono circular recto cuya base tiene radio r y lado recto l.

   Considérese el segmento de recta que une el origen con el punto $(\sqrt{l^2 - r^2}, r)$. Al girar al segmento alrededor del eje x se obtiene el cono dado.

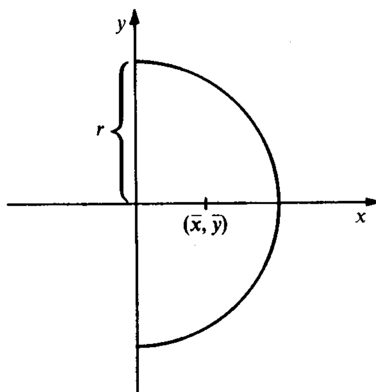
   Según el teorema de Pappo, obtenemos que el área de este cono es igual a

$$2\pi\frac{r}{2}l = \pi r l,$$



   ya que las coordenadas del centroide son $(\sqrt{l^2 - r^2}/2,\ r/2)$ (véase figura).

2. Considérese el área de una esfera de radio r que, como se sabe, es $4\pi r^2$. Con este dato se obtienen las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del semicírculo mostrado en la figura siguiente, ya que, por el teorema de Pappo, se tiene que $4\pi r^2 = 2\pi\ \bar{x}\ \pi r$, de donde $\bar{x} = r/\pi$. La segunda coordenada $\bar{y}$ es nula, debido a la simetría de la curva (véase Ejercicio 10.26).



EJERCICIOS

11.1 Calcúlese el área bajo la gráfica en cada una de las funciones siguientes, entre $x = a$, $x = b$.

a) $f(x) = 1 - x^2$, $a = -1$, $b = 1$
b) $f(x) = x^2 - 9$, $a = 3$, $b = 3$
c) $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, $a = 0$, $b = 2$
d) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, $a = 0$, $b = 4$

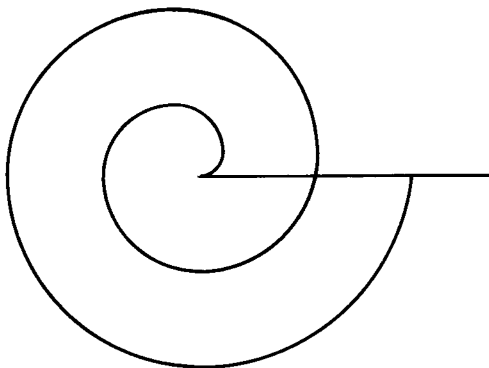
11.2 Calcúlese el área de la región limitada por

a) la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de las abscisas,
b) la curva $y = x(x - 1)(x - 2)$ y el eje x,
c) la curva $y = \tan x$, el eje x y la recta $x = \pi/3$,
d) la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje y,
e) las curvas $x = 6y^2 - 3$ y $x + 3y = 0$,
f) las curvas $y = |x|$ e $y = x^4$,
g) las curvas $y = -x$ e $y = 2x - 3x^2$,
h) las curvas $y = x^2 - x$ e $y = x - x^2$,
i) las parábolas $y = x^2/3$ e $y = 4 - \dfrac{2}{3}x^3$,
j) la hipérbola $xy = 4$ y $x = 1$, $x = 3$ y el eje x

En los ejercicios 3 y 4 se considerarán ecuaciones polares.

11.3 Hállese el área de la región limitada por

a) la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$, donde $a > 0$,
b) la primera y segunda espira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$, donde $a > 0$,



c) una de las hojas de la curva $\rho = 2\cos 2\theta$,
d) la parábola $\rho = 2\sec^2(\theta/2)$ y las rectas $\theta = \pi/4$ y $\theta = \pi/2$,
e) $\rho = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$,
f) $\rho = 2 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta$,
g) la elipse $\rho = 2/(1 + \frac{1}{2}\cos\theta)$.

11.4 a) Hállese el área de la región que es interior a $\rho = 4\cos\theta$ y exterior a $\rho = 2$.
b) Hállese el área de la región que es interior a $\rho^2 = 8\cos 2\theta$ y exterior a $\rho = 2$.
c) Hállese el área de la región que es interior a $\rho = 3\cos\theta$ y exterior a $\rho = 1 + \cos\theta$.
d) Hállese el área que es interior a $\rho = \sqrt{2\cos\theta}$ y exterior a $\rho = 2(1 - \cos\theta)$.

11.5 Encuéntrese la longitud de la curva indicada en cada caso.
a) $f(x) = x^{3/2}$; $x \in [0, 4]$
b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 1/(2x)$; $x \in [1, 3]$
c) $f(x) = 2\sqrt{x}$; $x \in [0, 1]$
d) $f(x) = e^x$; $x \in [0, 1]$
e) $f(x) = \log x$; $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

11.6 Demuéstrese que toda recta del plano tiene una representación paramétrica de la forma

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$

[*Sugerencia:* Considérense dos casos, uno en que la recta es vertical y otro en que no lo es.]

11.7 Dibújese la curva definida por cada una de las siguientes parejas de ecuaciones paramétricas.

a) $x = \cos t$, $y = \cos^2 t$ b) $x = \cos^2 t$, $y = \cos^4 t$

c) $x = t^2$, $y = t^4$ d) $x = -\sqrt{-t}$, $y = -t$

Dibújese la gráfica de $y = x^2$ y compárese cada una de las curvas anteriores con esta última. Encuéntrense, además, dos conjuntos más de ecuaciones paramétricas que representen parte de $y = x^2$ y sean diferentes de a) a d).

11.8 Encuéntrese la longitud de las curvas indicadas a continuación:

a) $\left.\begin{array}{l} x = 7t - 3 \\ y = 5t + 2 \end{array}\right\} t \in [0, 2]$ b) $\left.\begin{array}{l} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\} t \in [0, 2\pi]$

c) $\left.\begin{array}{l} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\operatorname{sen} t \end{array}\right\} t \in [0, 2\pi]$ d) $\left.\begin{array}{l} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t \end{array}\right\} t \in [0, \pi]$

e) $\left.\begin{array}{l} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t \end{array}\right\} t \in [0, \pi]$ f) $\left.\begin{array}{l} x = t^{3/2} \\ y = \dfrac{(6t + 9)^{3/2}}{9} \end{array}\right\} t \in [0, 4]$

g) $\left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = \operatorname{sen} t \end{array}\right\} t \in [0, 0.15]$ h) $\left.\begin{array}{l} x = 4t + 3 \\ y = 2t^2 \end{array}\right\} t \in [0, 5]$

i) $\left.\begin{array}{l} x = e^t\cos t \\ y = e^t\operatorname{sen} t \end{array}\right\} t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ j) $\left.\begin{array}{l} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{array}\right\} t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

11.9 La curva $\mathscr{C}$ que tiene por ecuación polar $\rho = f(\theta)$, puede expresarse en forma paramétrica como

$$x = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta,$$

usando θ como parámetro. Pruébese que la longitud del arco de la curva $\mathscr{C}$, cuando θ varía entre θ_1 y θ_2, está dada por

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta,$$

suponiendo que f' es continua.

En el siguiente ejercicio aparecen ecuaciones polares.

11.10 Hállense:

a) La longitud de la espiral $\rho = e^{-\theta}$; $\theta \in [0, 2\pi]$.

b) La longitud de $\rho = \theta$; $\theta \in [0, 2\pi]$.

c) La longitud de la cardioide $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

d) La longitud de $\rho = \cos^2(\theta/2)$; $\theta \in [0, \pi]$.

e) La longitud del arco de la espiral $\rho = 2e^{\theta}$ que es interior al círculo $\rho = 2$.

11.11 Calcúlense los volúmenes de los sólidos siguientes, obtenidos al girar las regiones bajo las curvas de la manera que se indica a continuación:

a) $f(x) = 3x^2$; $x \in [-1, 3]$, alrededor del eje x.

b) $f(x) = x^3$, $x \in [0, 2]$, alrededor del eje y.

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $x \in [0, \pi]$, alrededor del eje x.

d) $f(x) = \cosh x$, $x \in [-1, 1]$, alrededor del eje x.

e) $f(x) = |x| - x$, $x \in [-3, 2]$, alrededor del eje x.

11.12 En los incisos siguientes, encuéntrese el volumen del sólido generado al girar (respecto al eje indicado) la región limitada por las curvas dadas:

a) $y = x^2$, $y = 1$ (eje x).

b) $y = x^2$, $y = x$ (eje y).

c) $y = x^2$, $y = 3 - 2x$ (eje x).

d) $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$ (eje x).

e) $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$ (eje y).

f) $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, con $x \in [0, \pi]$ (eje x).

g) $y^2 = 4x + 16$, $x = 0$ (eje y).

h) $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ (eje y).

i) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$ (eje x).

j) $y = \operatorname{sen} x$, con $x \in [0, \pi]$, $y = 0$ (eje x).

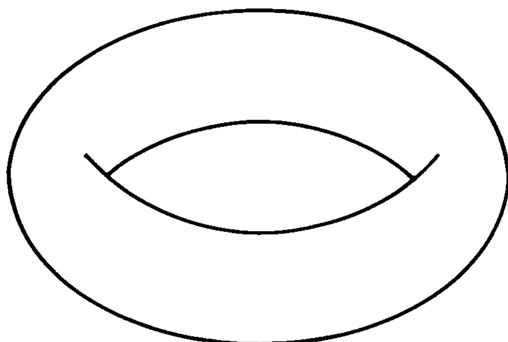
11.13 Por el centro de una bola de billar, perfectamente esférica, se hace una perforación cilíndrica. El radio de la esfera no se conoce; sin embargo, se sabe que la longitud del agujero es igual a R unidades.

Muéstrese que el volumen de lo que queda de la esfera, después de perforarla, es igual al volumen de una esfera de diámetro R.

11.14 Considérese la esfera como un sólido de revolución, y encuéntrese la fórmula de su volumen, suponiendo que el radio es R.

11.15 Hállese el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x, la región comprendida entre $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

11.16 Hállese el volumen del toro generado al girar el disco $(x - a)^2 + y^2 \leqslant r^2$, $r < a$, donde $r > 0$, alrededor del eje y (véase figura).



11.17 Encuéntrese el volumen de un cono circular recto cuya base tiene radio r y cuya altura es h.

11.18 Encuéntrese el volumen generado al girar el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(1, 3)$, alrededor del eje y.

11.19 De acuerdo con la ley de la gravitación universal de Newton, dos cuerpos A y B cuyas masas son m_1 y m_2, respectivamente, se atraen mutuamente con una fuerza de magnitud

$$F(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2};$$

siendo r la distancia que separa a A y B, y donde G es constante. En lo que sigue déjese G, indicado en las respuestas.

a) Encuéntrese el trabajo desarrollado para separar 3 m a dos cuerpos que se encuentran separados 1 m, suponiendo que uno de ellos está fijo.

b) Encuéntrese el trabajo desarrollado para separar dos objetos una distancia igual a d m, con $d > 1$, si inicialmente tienen 1 m de separación, suponiendo que uno de ellos está fijo.

11.20 Calcúlese el trabajo desarrollado para estirar 20 cm un resorte, cuya longitud natural es de 8 cm, si para estirarlo 0.25 m se requiere de $\frac{1}{2}$ newton.

11.21 La ley de Coulomb establece que la magnitud de la fuerza de interacción entre dos cargas eléctricas q_1 y q_2 está dada por

$$F(x) = \frac{kq_1q_2}{r^2},$$

donde r es la distancia que separa a las cargas y k una constante de proporcionalidad. De acuerdo con esta ley, y teniendo en cuenta que cuando las cargas son del mismo signo se repelen y cuando son de signo contrario se atraen, dígase cómo interactúan dos electrones (carga negativa) y además:

a) Si uno de ellos está fijo en el punto 2 del eje x, hállese el trabajo realizado por las fuerzas para trasladar al otro electrón desde el punto 4 hasta el punto 8.

b) Si un electrón está fijo en el punto O del eje x y el otro lo está en el punto 1, hállese el trabajo realizado por las fuerzas para trasladar un tercer electrón del punto 2 al 6.

11.22 ¿Cuál es el trabajo desarrollado para mover una partícula 5 cm, si la fuerza F está dada por $F(x) = 15x^2$, donde x es la distancia recorrida?

11.23 ¿Qué trabajo debe realizarse para levantar un cuerpo de masa M de la superficie de la tierra, cuyo radio es R, a una altura h? ¿A qué será igual este trabajo si hay que llevar el cuerpo al infinito?

11.24 Un cilindro con un émbolo móvil, de diámetro $D = 20$ cm y longitud $L = 80$ cm, está lleno de vapor con una presión $P = 10$ kg/cm^2. ¿Qué trabajo hace falta realizar para disminuir el volumen del vapor dos veces si la temperatura permanece constante? (Proceso *isotérmico*. Usese presión $\times$ volumen $= k \times$ temperatura, donde k es constante.)

11.25 En los ejercicios siguientes, calcúlese el área de las superficies que se generan al girar alrededor del eje indicado las curvas dadas.

a) $y = x^3$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$, alrededor del eje x.

b) $y = (x^4/2) + (x^2/3)$ desde $(1, 0)$ hasta $(4, 0)$, alrededor del eje y.

c) $y = (x^2 - 1)^{3/2}$ desde $x = 2$ hasta $x = 4$, alrededor del eje y.

d) $y = \operatorname{sen} x$ desde $x = \pi$ hasta $x = 2\pi$, alrededor del eje x.

e) $y = e^{-x}$, con $x \geqslant 0$, alrededor del eje x.

f) $9y^2 = x(3 - x)^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 3$, alrededor del eje x.

11.26 Sea C la gráfica de una función con derivada continua en $[a, b]$. Pruébese que, si f es simétrica respecto a alguno de los ejes, entonces el centroide de C está en ese eje.

11.27 Hállese el área del toro obtenido al girar alrededor del eje y a la circunferencia $(x - b)^2 + y^2 = a^2$, donde $a < b$. (Usese el teorema de Pappo.)

Georg Friedrich Bernhardt Riemann
(1826 a 1866)

Nació en Hannover, Alemania, y a los 25 años de edad obtuvo su grado de doctor en la Universidad de Gotinga. Se le considera uno de los matemáticos más creativos del siglo XIX y sus trabajos influyeron, en forma notable, en la geometría y el análisis matemático; además, su concepción de la geometría del espacio tuvo un profundo efecto en la física teórica moderna. En gran parte, sus ideas constituyeron los fundamentos de los conceptos y métodos utilizados después en la teoría de la relatividad.

Al hacer estudios en física experimental y en naturphilosophie *(ciencias), la que busca obtener principios universales de todos los fenómenos naturales, Riemann concluyó que la teoría matemática podría asegurar una conexión entre el magnetismo, la luz, la gravitación y la electricidad, y sugirió teorías de campo en las que el espacio alrededor de las cargas eléctricas puede describirse en forma matemática.*

Su tesis doctoral Grundlagen fur eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grosse *fue dirigida por Gauss, y es considerada uno de los mayores logros de la matemática del siglo XIX. Entre sus famosos trabajos, cabe destacar* Uber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe *y* Uber die Hypothesen Welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Muchos resultados importantes en matemática llevan el nombre de Riemann; baste recordar que en este texto se ha estudiado la «integral de Riemann». Al morir Gauss, le sucedió, en Gotinga, Peter Lejeune Dirichlet, quien, a su vez, fue sucedido por Riemann. Este murió siendo aún muy joven, durante un viaje que hizo a Italia en busca de alivio a una pleuresía que se convirtió en pulmonía.

En forma paralela a la vida de Riemann se destacan, en otras ramas de la actividad humana, los hechos siguientes:

LITERATURA

Carroll, Lewis: *Alicia en el país de las maravillas,* 1865.

Dickens: *Los papeles póstumos del Club Pickwick,* 1836; *David Copperfield,* 1849; *Historia de dos ciudades,* 1859.

Hugo, Víctor: *Hernani,* 1830; *Nuestra Señora de París,* 1831; *La leyenda de los siglos,* 1859; *Los miserables,* 1862.

Stendhal: *Rojo y negro*, 1831; *La cartuja de Parma*, 1839.
Tolstoi: *La guerra y la paz*, 1865.

MUSICA

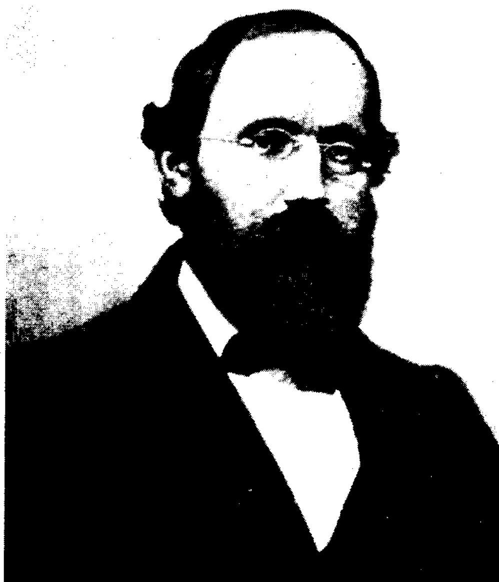
Brahms: *Concierto núm. 1 para piano*, 1857.
Schumann: *Carnaval*, 1835; *Kraisleriana*, 1838; *Concierto para piano*, 1841; *Manfredo*, 1848; *Sinfonía La Renana*, 1850.
Verdi: *Nabucco*, 1842; *Rigoletto*, 1851; *El trovador*, *La Traviata*, 1853; *La fuerza del destino*, 1862.

PINTURA

Degas: *Antes de la salida*, 1862; *En las carreras*, 1865.
De la Croix: *La muerte de Sardanápalo*, 1828; *La libertad guiando al pueblo*, 1830.
Manet: *Lola de Valencia*, 1861; *Olimpia*, *Dejéuner sur l'herbe*, 1863.

CULTURA EN GENERAL

Aparecen: el ferrocarril, 1830; el motor eléctrico, 1831; el teléfono, 1833; la cámara fotográfica, 1839; el submarino, 1850.
Darwin: *El origen de las especies*, 1859.
Humboldt: *Viaje a las regiones equinocciales*, 1834.
Marx y Engels: *Manifiesto del Partido Comunista*, 1848.



Georg Friedrich Bernhardt Riemann

12 INTEGRACION NUMERICA

Cuando se tiene el problema de calcular un área que puede ser identificada con el área bajo la gráfica de una función real e integrable f (continua o no y definida en un intervalo $[a, b]$), entonces puede escribirse, según se vio en capítulos anteriores, por medio de la integral definida,

$$\text{área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

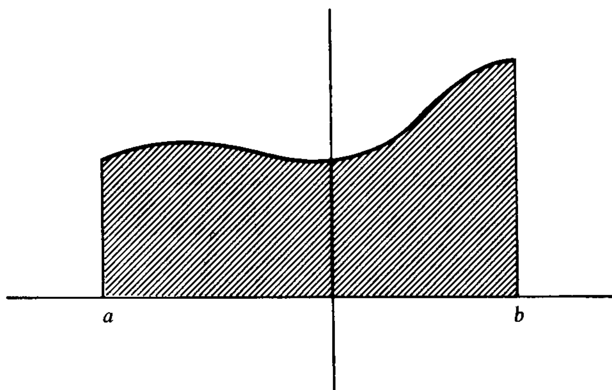


Figura 12.1

Así, el problema se ha convertido en resolver una integral, la cual podemos calcular, en caso de que f sea continua, con la ayuda del teorema fundamental del cálculo, que dice: si f es continua sobre $[a, b]$, entonces existe una función F definida en todo el intervalo $[a, b]$, derivable, tal que $F' = f$ en todo el intervalo $[a, b]$ y, además,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad [12.1]$$

Pero no siempre es posible expresar F como combinación finita de funciones tales como polinomios, funciones racionales, funciones trigonométricas, etc., que en general son las únicas para las cuales es posible saber los valores numéricos de $F(b)$ y $F(a)$ o, lo que es igual, el valor numérico del área. Por tal motivo, se darán cuatro métodos para aproximar el valor numérico del área, es decir, el de [12.1] y, como sabemos que una primitiva F de f está dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

cuando f es continua en $[a, b]$, entonces tales métodos pueden servir para aproximar los valores tomados por F en x. Como ejemplo de funciones que no poseen primitivas elementales están

$$e^{-x^2}, \quad \frac{1}{\log|x|}, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}$$

(Se sugiere buscar primitivas de las funciones anteriores en algunas tablas de integrales.)

INTEGRACION POR RECTANGULOS

Supóngase que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$; para lograr un valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales de longitud común $(b - a)/n$, los cuales quedan determinados mediante la partición

$$\left\{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, x_n = a + n\frac{(b-a)}{n} = b\right\}$$

Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= f(x_0)\left(\frac{b-a}{n}\right) + f(x_1)\left(\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f(x_{n-1})\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

sacando de factor común a $(b - a)/n$ y, recordando cuáles son las x_n, tenemos como aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$,

$$\frac{b-a}{n}\left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\right] \qquad [12.2]$$

Esta última expresión representa la suma de las áreas de n rectángulos, todos de base $\frac{b-a}{n}$ y de altura $f(a)$, $f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)$, $f\left(a+\frac{2(b-a)}{n}\right)$, ..., $f\left(a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)$, respectivamente (Fig. 12.2).

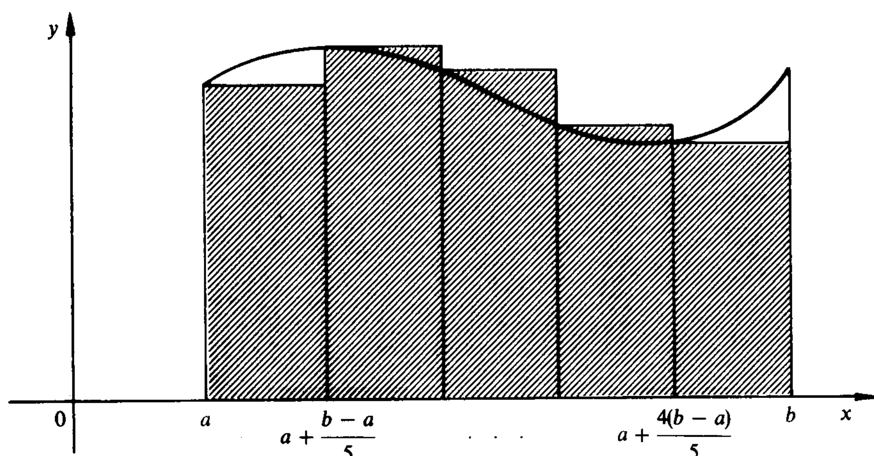


Fig. 12.2 Aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ = área sombreada.

Una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ análoga a [12.1] es

$$\frac{b-a}{n}\left[f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+\frac{2(b-a)}{n}\right)+\cdots+f(b)\right],$$

la cual se obtiene tomando como la altura de los n rectángulos los valores de f en los puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ de la partición original (Fig. 12.3).

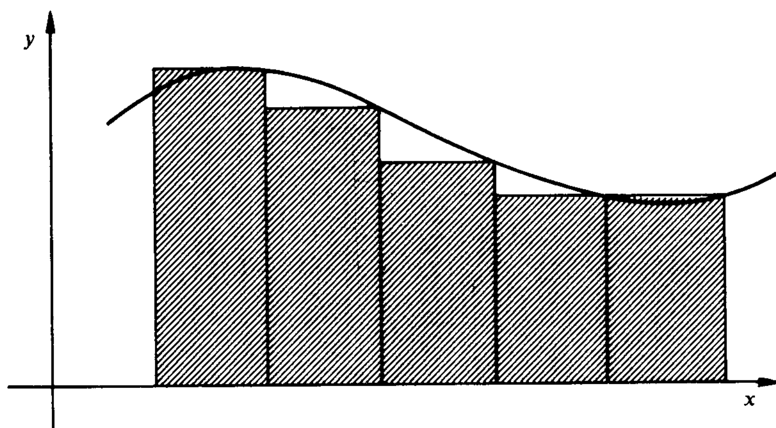


Figura 12.3

INTEGRACION POR TRAPECIOS

Este método consiste en considerar n trapecios, como se muestra en la figura 12.4, y la misma partición anterior.

Al recordar que el área de un trapecio es

$$\tfrac{1}{2}(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura},$$

se tiene que el área del trapecio i es

$$\frac{(f(x_{i-1}) + f(x_i))(x_i - x_{i-1})}{2}$$

Por consiguiente, la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

es aproximadamente igual a la suma

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}),$$

y como

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$

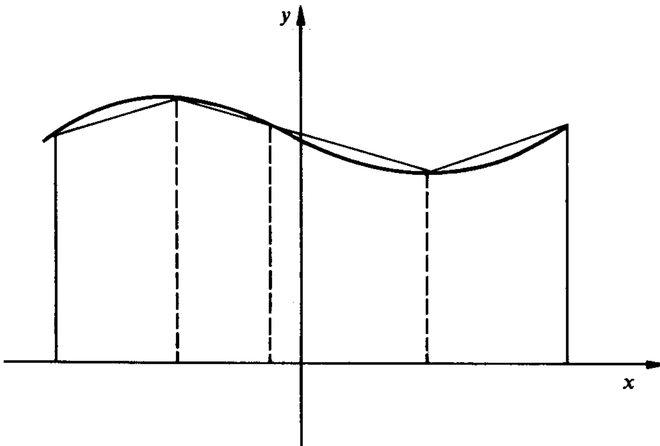


Figura 12.4

esta suma se reduce a

$$\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + f(x_n)) \qquad [12.3]$$

Si se descompone [12.3] del modo siguiente:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) + \right.$$
$$\left. + \frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))\right], \qquad [12.4]$$

se observa que cuando $n \to \infty$ cada uno de los sumandos que se encuentran dentro del paréntesis rectangular tiende a la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

y, por tanto, cuando $n \to \infty$, la ecuación [12.4] tiende a

$$\frac{1}{2}\left(2\int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Así pues, cuanto más grande sea n, tanto mejor será la aproximación del área bajo f, mediante [12.4].

Trapecios parabólicos

Otro método para el cálculo numérico de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se obtiene aproximando a la función f por una función $\hat{f}$, que en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es una cuadrática que toma los mismos valores que f en el centro y los extremos de ese intervalo. Para este efecto demos una nueva partición del intervalo, que sea $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}]$, de manera que $x_i - x_{i-1} = (b-a)/2n$; entonces la función $\hat{f}$ que aproxima a f queda dada por

$$\hat{f}(x) = Ax^2 + Bx + C \quad \text{para} \quad x \in [x_0, x_2],$$

donde A, B y C son tales que

$$\hat{f}(x_0) = f(x_0), \quad \hat{f}(x_1) = f(x_1), \quad \hat{f}(x_2) = f(x_2). \qquad [12.5]$$

Denomínense esos valores como y_0, y_1, y_2; los coeficientes A, B y C están dados de manera única por [12.5]. (Consúltese un texto de geometría analítica.) En cada intervalo $[x_{2(i-1)}, x_{2i}]$ se procede en forma análoga.

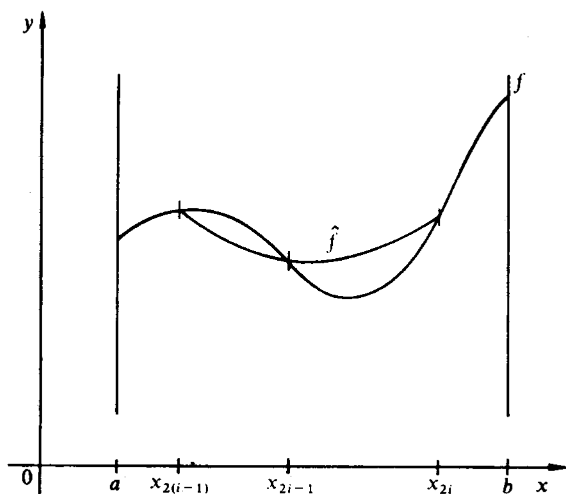


Figura 12.5

En la figura 12.5 aparecen las gráficas de f y de $\hat{f}$. Ahora calcúlese el área bajo la gráfica de $\hat{f}(x) = Ax^2 + Bx + C$ (véase Fig. 12.6) evaluada entre los límites x_0 y x_2 para lo cual se escribe $x = (x - x_1) + x_1$ y $\hat{f}$ queda escrito en la forma

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= A[(x - x_1) + x_1]^2 + B[(x - x_1) + x_1] + C = \\ &= A(x - x_1)^2 + (2Ax_1 + B)(x - x_1) + (Ax_1^2 + Bx_1 + C) = \\ &= A'(x - x_1)^2 + B'(x - x_1) + C', \qquad [12.6]\end{aligned}$$

donde A', B' y C' son los coeficientes resultantes después de agrupar los términos correspondientes.

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} \hat{f}(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_2} [A'(x - x_1)^2 + B'(x - x_1) + C']\,dx \\ &= \frac{A'(x - x_1)^3}{3} + \frac{B'(x - x_1)^2}{2} + C'x\Bigg|_{x_0}^{x_2} \\ &= \frac{A'(x_2 - x_1)^3}{3} + \frac{B'(x_2 - x_1)^2}{2} + C'x_2 - \\ &\quad -\frac{A'(x_0 - x_1)^3}{3} - \frac{B'(x_0 - x_1)^2}{2} - C'x_0 \\ &= \frac{A'(x_2 - x_1)^3}{3} + \frac{A'(x_1 - x_0)^3}{3} + \frac{B'(x_2 - x_1)^2}{2} - \\ &\quad -\frac{B'(x_1 - x_0)^2}{2} + C'(x_2 - x_0).\end{aligned}$$

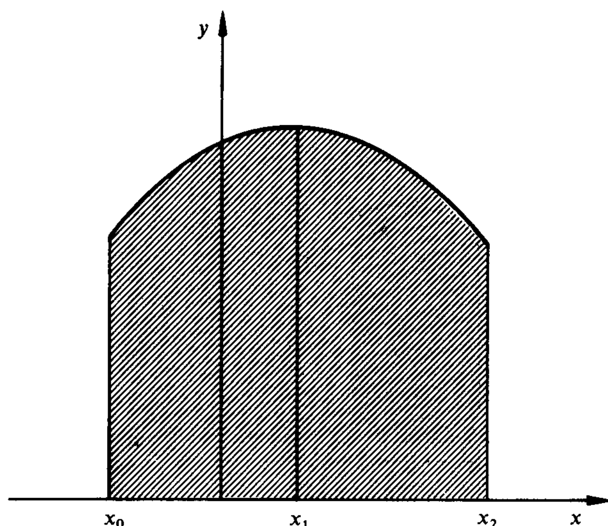


Figura 12.6

Recordando que

$$x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = \frac{b-a}{2n}, \qquad [12.7]$$

obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_2} \hat{f}(x)\,dx = \frac{2A'\left(\dfrac{b-a}{2n}\right)^3}{3} + C' \cdot 2\left(\frac{b-a}{2n}\right) \qquad [12.8]$$

Los valores de A' y C' se obtienen sustituyendo x_0, x_1 y x_2 en [12.6], respectivamente,

$\hat{f}(x_1) = C' = y_1$

$\hat{f}(x_2) = A'(x_2 - x_1)^2 + B'(x_2 - x_1) + C' = y_2$

$\hat{f}(x_0) = A'(x_0 - x_1)^2 + B'(x_0 - x_1) + C' = A'(x_1 - x_0)^2 - B'(x_1 - x_0) + C' = y_0.$

Usando de nuevo la ecuación [12.7], se tiene

$$y_2 = A'\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 + B'\left(\frac{b-a}{2n}\right) + C'$$

$$+ \quad y_0 = A'\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 - B'\left(\frac{b-a}{2n}\right) + C'$$

$$y_0 + y_2 = 2A'\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 + 2C' \qquad [12.9]$$

Así,

$$2A'\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 = y_0 + y_2 - 2C' \Rightarrow y_0 - 2y_1 + y_2,$$

de donde

$$A' = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2}$$

Al reemplazar este resultado en [12.8] se llega a

$$\int_{x_0}^{x_2} \hat{f}(x)\,dx = \frac{2(y_0 - 2y_1 + y_2)\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3}{2\cdot 3\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2} + 2y_1\left(\frac{b-a}{2n}\right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{2n}\right)\left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{3} + 2y_1\right) = \left(\frac{b-a}{2n}\right)\left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{2n}[y_0 + 4y_1 + y_2] = \frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Si se suma el resultado de las áreas acotadas por los n arcos parabólicos, se tiene la aproximación que deseamos de $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) +$$

$$+ f(x_4) + \quad + f(x_{2(n-1)}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) +$$

$$+ 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{2(n-1)}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \qquad [12.10]$$

Descomponiendo esta suma y siguiendo métodos análogos a los descritos al final de cada uno de los métodos anteriores, puede comprobarse que [12.10] tiende a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $n \to \infty$.

EJEMPLO

Al calcular directamente la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}, \qquad [12.11]$$

se obtiene

$$\text{ang tan } x|_0^1 = \text{ang tang } 1 - \text{ang tang } 0 = \frac{\pi}{4},$$

de donde

$$4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Por tanto, la integración numérica de cuatro veces [12.11] proporciona un resultado aproximadamente igual a π. Para ello se hará la integración numérica empleando los tres métodos descritos en esta sección.

(a) Para la integración por rectángulos, tómese $n = 20$ y, en consecuencia, la partición de $[0, 1]$ siguiente,

$$\left\{0, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \ldots, \frac{19}{20}, 1\right\}; \qquad [12.12]$$

usando la ecuación [12.2] se obtiene

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

aproximadamente igual a

$$\begin{aligned} &4\cdot\frac{1}{20}\left[\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+(\frac{1}{20})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{19}{20})^2}\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[1 + \frac{400}{401} + \frac{400}{404} + \cdots + \frac{400}{761}\right] \\ &= 3.1917 \end{aligned}$$

(b) Para la integración por trapecios, tómese la misma partición de $[0, 1]$, entonces [12.4] da la aproximación de π siguiente:

$$\begin{aligned} \pi &\simeq 4\cdot\frac{1}{20}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{20})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{20})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{19}{20})^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+1^2}\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2} + \frac{400}{401} + \frac{400}{404} + \cdots + \frac{400}{361} + \frac{1}{4}\right] = 3.1417 \end{aligned}$$

(c) En el método de los trapecios parabólicos, tomamos también $n = 20$; por tanto, $2n = 40$ y una partición

$$\left\{0, \frac{1}{40}, \frac{2}{40}, \frac{3}{40}, \frac{4}{40}, \ldots, \frac{39}{40}, 1\right\} \qquad [12.13]$$

para el intervalo [0, 1]. Usando [12.10] se obtiene, como aproximación de π, el resultado siguiente:

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{40}\left[\frac{1}{1+0^2} + 4\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{40})^2}\right) + 2\left(\frac{1}{1+(\frac{2}{40})^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \cdots + 2\left(\frac{1}{1+(\frac{38}{40})^2}\right) + 4\left(\frac{1}{1+(\frac{39}{40})^2}\right) + \frac{1}{1+1^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{30}\left[1 + \frac{6400}{1601} + \frac{3200}{1604} + \cdots + \frac{3200}{3044} + \frac{6400}{3121} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= 3.1409$$

POLINOMIOS DE TAYLOR E INTEGRACION NUMERICA

Para obtener un método de integración numérica, puede utilizarse también el polinomio de Taylor (estudiado en el Cap. 6).

Según se recuerda, se pidió que f fuera una función con n derivadas continuas en $[a, b]$, con lo cual tenemos que para todo $x \in [a, b]$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \qquad [12.14]$$

donde

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

De la ecuación [12.14] se tiene que

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

y como $f(x)$ y $P_n(x)$ son continuas en $[a, b]$, entonces $R_n(x)$ es continua en $[a, b]$ y, por tanto, está acotada en ese intervalo; supóngase que M es un real positivo tal que

$$|R_n(x)| \leqslant M \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b],$$

por tanto,

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b P_n\right| = \left|\int_a^b R_n\right| \leqslant (b-a)M,$$

lo que dice que a la integral $\int_a^b f$ podemos aproximarla por $\int_a^b P_n$ con un error menor o igual que $(b-a)M$.

EJEMPLOS

1. Aproxímese el valor de

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

con un error menor que 10^{-3}.

Solución Se sabe que

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}e^t,$$

con t entre 0 y u, donde se hace uso del residuo $R_n(u)$ en la forma

$$R_n(u) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(u-a)^{n+1},$$

ya que, en este caso, podemos hablar de la derivada de orden $n + 1$, debido a que $f(t) = e^t$; obsérvese, además, que se desarrolla la función alrededor del punto $a = 0$. Así pues,

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \frac{(-x^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-s^2}; \qquad s \in (0, x),$$

por lo que

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-x^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-s^2}\right|,$$

pero como

$$|e^{-s^2}| < 1,$$

se tiene que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

y, además, como $x \in [0, 1]$, se obtiene

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!};$$

si $n = 6$, entonces

$$|R_6(x)| \leqslant 0.198412 \times 10^{-3} < 10^{-3};$$

y, por lo dicho en párrafos iniciales, tenemos que

$$\left|\int_0^1 R_6(x)\right| \leqslant (1)(0.1984212 \times 10^{-3}) < 10^{-3},$$

por consiguiente,

$$\int_0^1 e^{-x^2} \cong \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{11}}{5!11} + \frac{x^{13}}{6!13}\right]_0^1 \cong 0.9257862$$

con un error menor que 10^{-3}.

2. Calcúlese una aproximación de la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

con un error menor que 10^{-3} para $a \in [0, \frac{1}{2}]$.

Solución Sea $f(t) = (1 - t)^{1/2}$. Luego

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(1 - t)^{-1/2},\ f''(t) = -\frac{1}{2^2}(1 - t)^{-3/2},\ f'''(t) = -\frac{1 \cdot 3}{2^3}(1 - t)^{-5/2},$$

$$f^{IV}(t) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4}(1 - t)^{-7/2}, \ldots, f^{(n+1)}(t) = -\frac{(2n - 1)!!}{2^{n+1}}(1 - t)^{-(2n+1)/2}$$

Con $(2n - 1)!!$ se representa al producto de los enteros impares desde 1 hasta $2n - 1$. Así,

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(t) = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}t^2 -$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}t^3 - \cdots - \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!}t^n + R_n(t);$$

usando nuevamente el residuo en la forma de Lagrange, tenemos

$$R_n(t) = \frac{(2n + 1)!!}{2^{n+1}(n + 1)!}t^{n+1}(1 - s)^{-(2n+1)/2}; \qquad s \in (0, t)$$

Por tanto,

$$f(a^2 \operatorname{sen}^2 x) = \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x} = 1 - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^2 x - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}a^2 \operatorname{sen}^4 x - \cdots -$$

$$- \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!}a^{2n} \operatorname{sen}^{2n} x + R_n(t)$$

Obsérvese que como $a \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $t = a^2 \operatorname{sen}^2 x \in [0, \frac{1}{4}]$ y, así,

$$R_n(t) = \frac{(2n + 1)!!}{2^{n+1}(n + 1)!}t^{n+1}(1 - s)^{-(2n+1)/2} \leqslant \frac{(2n + 1)!!}{2^{n+1}(n + 1)!4^{n+1}(\frac{3}{4})^{(2n+1)/2}} =$$

$$= \frac{(2n + 1)!!}{8^{n+1}(n + 1)!(\frac{3}{4})^{(2n+1)/2}};$$

para $t \in (0, \frac{1}{4})$. Así,

$$R_5(t) \leqslant 0.386 \times 10^{-4}$$

Por tanto,

$$\int_0^{\pi/2} R_5(t)\,dt \leqslant \frac{\pi}{2} \times 0.386 \times 10^{-4} \cong 0.772 \times 10^{-4} < 10^{-3}$$

Entonces, para $a \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x}\,dx \cong \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^2 x - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} a^4 \operatorname{sen}^4 x - \right.$$
$$\left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} a^6 \operatorname{sen}^6 x - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^5 \cdot 5!} a^{10} \operatorname{sen}^{10} x\right] dx$$

con un error menor que 10^{-3}.

Nota La integral de este ejemplo se conoce como *integral elíptica.*

EJERCICIOS

12.1 Aplíquense los tres métodos descritos en esta sección para calcular las integrales siguientes:

a) $\int_{-2}^{2} (3x^3 - 5x^2 + 1)\,dx$ b) $\int_{-1}^{1} (x^3 - 2x + 3)\,dx$

c) $\int_0^1 (1 - x^3)\,dx$ d) $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$

e) $\int_0^4 x^3\,dx$ f) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$

g) $\int_1^5 x^2\,dx$ h) $\int_0^3 (x^3 - x^2 + 7)\,dx$

Usese $n = 10$ y compárense los resultados evaluando las integrales.

12.2 Muéstrese que

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x}\,dx \cong \left[\frac{}{2 \cdot 2!} \quad \frac{}{4 \cdot 4!} + \frac{}{6 \cdot 6!} \quad \frac{}{8 \cdot 8!}\right]$$

y hágase una estimación del error.